F 1503/1

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 1–2

SECŢIA I MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ
FIZICĂ

1976

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1988

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 1–2

SECŢIA I MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ
FIZICĂ

1976

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CĂLISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. dr. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

I. MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ.
FIZICĂ

Prof. dr. doc. AL. CLIMESCU
Prof. em. GH. CIOBANU
Prof. dr. doc. V. PETRESCU

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XXIII (XXVI), Fasc. 1–2 1976

Secţia I

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

SUMAR

Pag.

S. T. CHIRIACESCU, N. IONIŢĂ, L. E. KRIVOŞEIN (URSS) şi D. MANGERON, Probleme neliniare de control terminal în prezenţa operatorilor ereditari şi funcţionali (rom., rez. engl.) 7

ALFRED BRAIER, Derivate de ordin arbitrar ale funcţiilor reprezentabile prin algebre (engl., rez. rom.) 13

JUHANI NIEMINEN (Finlanda), Observaţii asupra analizei grafurilor experimentale (engl., rez. rom.) 17

CARMEN ZITRON, Aspecte algebrice în teoria grafurilor (germ., rez. rom.) 21

D. D. BAINOV (Bulgaria), R. CHALÉAT (Franţa), L. E. KRIVOŞEIN (URSS) şi D. SALANDI (Italia), Studiul diferitelor clase de ecuaţii integro-diferenţiale ale lui Mangeron (II) (franc., rez. rom.) 27

ELENA VAMANU, Cvasi-conexiuni complet reductibile pe spaţii cu structura aproape produs (rom., rez. franc.) 33

VIOREL GHIUŞ, O teoremă de ofertă-cerere simetrică pentru fluxul de două produse (rom., rez. franc.) 39

ZORAN VRCELJ (Iugoslavia), Derivate spaţiale (II) (engl., rez. rom.) . . . 45

I. ONCIULENCU, Ecuaţii diferenţiale analitice în spaţii Banach (rom., rez. franc.) 51

GH. BANTAŞ, Ecuaţii integrale cu soluţii în spaţiul funcţiilor riglate (franc., rez. rom.) 55

GH. NISTOR, O metodă analitică de calcul al deplasărilor orizontale ale construcţiilor folosind măsurările topogeodezice (rom., rez. franc.) 61

Q. K. GHORI (Pakistan), Ecuaţiile lui Mangeron-Deleanu în variabilele lui Poincaré-Cetaev (engl., rez. rom.) 69

S. A. S. MESSIHA şi N. A. IBRAHIM (Egipt), Curgerea nepermanentă a unui fluid nenewtonian între doi pereţi paraleli (engl., rez. rom.). . . . 75

ELISABETA RUSU, Asupra unor teoreme într-o teorie generalizată a termoelasticităţii micropolare (engl., rez. rom.) 87

I. CRĂCIUN, Echilibrul elastic al barelor ortotrope aproape cilindrice încărcate pe suprafaţa laterală şi pe capete (engl., rez. rom.) 95

S. CHIRIŢĂ, Problema lui Saint-Venant generalizată pentru bare aproape cilindrice anizotrope heterogene (engl., rez. rom.) 101

EUGEN NEAGU şi RODICA NEAGU, Studiul procesului de limitare a sarcinilor termoelectreţilor (engl., rez. rom.) 107

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tome XXII (XXVI), Fasc. 1—2 1976

Section I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

CONTENTS

Pp.

S. T. CHIRIACESCU, N. IONIȚĂ, L. E. KRIVOSHEIN (USSR), D. MANGERON, Terminal Control Nonlinear Problems containing Hereditary and Functional Operators (Romanian, English summary) 7

ALFRED BRAIER, Arbitrary Order Derivatives for Functions Representable by Algebras (English, Romanian summary) 13

JUHANI NIEMINEN (Finland), Observations on Analyzing the Structure of Experimental Graphs (English, Romanian summary) 17

CARMEN ZITRON, Algebraische Gesichtspunkte der Graphentheorie (German, Romanian summary) 21

D. D. BAINOV (Bulgaria), R. CHALÉAT (France), L. E. KRIVOCHÉINE (USSR) et D. SALANDI (Italie), Problèmes concernant différentes classes d'équations intégrodifférentielles non linéaires de Mangeron (II) (French, Romanian summary) 27

ELENA VAMANU, Quasi-connexions complètement réductibles sur des espaces à structure presque-produit (Romanian, French summary) 33

VIOREL GHIUȘ, Un théorème symmétrique d'aprovisionement et de demande pour le flot de deux produits (Romanian, French summary) 39

ZORAN VRCELJ (Yugoslavia), Space Derivatives (II) (English, Romanian summary) 45

I. ONCIULENCU, Équations différentielles analytiques dans des espaces de Banach (Romanian, French summary) 51

GH. BANTAȘ, Équations intégrales à solution dans l'espace de fonctions réglées (French, Romanian summary) 55

GH. NISTOR, Une méthode analytique pour le calcul des déplacements horizontals des constructions par des mesures topogéodésiques (Romanian, French summary) 61

Q. K. GHORI (Pakistan), The Mangeron-Deleanu Equations in Poincaré-Cetaev Variables (English, Romanian summary) 69

S. A. S. MESSIHA and N. A. IBRAHIM (Egypt), Non-Newtonian Unsteady Flow between two Parallel Walls (English, Romanian summary) 75

ELISABETA RUSU, On Some Theorems in a Generalized Theory of Linear Micropolar Thermoelasticity (English, Romanian summary) 87

I. CRĂCIUN, Elastic Equilibrium of Orthotropic almost Cylindrical Beams loaded on the Lateral Surface and on the Ends (English, Romanian summary) 95

S. CHIRIȚĂ, Generalized Saint-Venant's Problem for Heterogeneous Anisotropic almost Cylindrical Beams (English, Romanian summary) 101

EUGEN NEAGU and RODICA NEAGU, The Study of the Limiting Process of the Thermoelectrets Charges (English, Romanian summary) 107

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XXII (XXVI), Вып. 1—2 1976

Секция I

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

С. Т. КИРИАЧЕСКУ, Н. ИОНИЦЭ, Л. Е. КРИВОШЕИН (СССР) и Д. МАНДЖЕРОН, О решении интегро-дифференциальной начальной задачи с терминальным уравнением (рум., рез. англ.) . . . 7

АЛФРЕД БРАИЕР, Дифференциалы произволного поридка функции представляемые альгебрами (англ., рез. рум.) 13

ЮХАНИ НИЕМИНЕН (Финландия), Эамечания об анализ экспериментальных графов (англ., рез. рум.) 17

КАРМЕН ЦИТРОН, Алгебрические аспекты в теория графов (герм., рез. рум.) 21

Д. А. БАЙНОВ (Болгария), Р. ШАЛЕА (Франция), Л. Е. КРИВОШЕИН (СССР), и Д. САЛАНДИ (Италия), К решению нелинейных интегродифференциальных уравнениях Манджерона (франц., рез. рум.) 27

ЭЛЕНА ВАМАНУ, Полно-приводимые квази-связности на пространствах с структурой почти-произведения (рум., рез. франц.) 33

ВИОРЕЛ ГИУШ, Одна симметрическая теорема о спроси предложения для поток двух продуктов (рум., рез. франц.) 39

ЗОРАН ВРЦЕЛЬ (Югославия), Пространственные производные (II) (англ., рез. рум.) 45

И. ОНЧЮЛЕНКУ, Аналитические дифференциальные уравнения в банаховых пространствах (рум., рез. франц.) 51

Г. БАНТАШ, Интегральные уравнения с решениями в пространстве линечатные функций (франц., рез. рум.) 55

Г. НИСТОР, Аналитический метод расчета оризонтальнои перемещении строительств с помощю топогеодезических измерении (рум., рез. франц.) 61

К. К. ГХОРИ (Индия), Уравнения Манжерона-Деляну в переменных Пуанкаре-Четаева (англ., рез. рум.)(. 69

С. А. С. МЕССИХА и Н. А. ИБРАХИМ (Египет), Нестационарное течение ненъютоновскои жидкости между двумя паралельными стенками (англ., рез. рум.) 75

ЭЛИСАБЕТА РУСУ, Некоторые теорем в обобщеннои линеинои теории микрополярнои термоэластичности (англ., рез. рум.) 87

И. КРЭЧЮН, Упругое равновесие ортотропных почти цилиндрических стержнеи, нагруженных по боковой поверхности и по концам (англ., рез. рум.) 95

С. КИРИЦЕ, Обобщенная задачи Сен Венана для гетерогеных анизотропных почти цилиндрических грусов (англ., рез. рум.) . . . 101

ЕУДЖЕН НЯГУ и РОДИКА НЯГУ, Исследование ограниченных процессов заряду в термоэлектрета (англ., рез. рум.) 107

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.Z. 517.948

PROBLEME NELINIARE DE CONTROL TERMINAL ÎN PREZENȚA OPERATORILOR EREDITARI ȘI FUNCȚIONALI [1])

DE

S. T. CHIRIACESCU, N. IONIȚĂ, L. E. KRIVOȘEIN și D. MANGERON

În memoria lui Tiberiu Popoviciu

1. În cadrul problemelor privind elaborarea unor noi metode de studiu a sistemelor neliniare cu operatori ereditari, polivibranți și policalorici, de interes vădit pentru Fizica Matematică, ultimii doi autori au publicat în perioada ultimelor trei cincinale, antrenînd și alți colaboratori, ca de ex. prof. M. N. Oguztoreli de la Universitatea din Alberta, prof. K. V. Leung de la Universitatea „Concordia" din Montreal, prof. F. S. Rossi de la Universitatea din Roma și prof. D. D. Bainov de la Institutul de Mecanică și Electrotehnică din Sofia, mai multe memorii inserate în SCMA, RMA, în „Comunicările" academiilor de științe din Belgia, R. P. China, Franța, RDG, India, Japonia, Polonia, SUA, Ungaria, U.R.S.S., precum și alte reviste de specialitate din țară și de peste hotare, [1]—[4].

Progresele actuale privind modelarea matematică a fenomenelor din ce în ce mai complexe din domeniul tehnicii înalte, ca de exemplu problematica interesînd stabilitatea mașinilor unelte așchietoare [5], modele dinamice de reactoare uni- și bidimensionale [6], dinamica sistemelor interconexe de termoelasticitate a corpurilor izotrope [7], precum și modelări în domeniul biomatematicii, biomecanicii [8], a plasmei [9] ș. a., au îndemnat pe autori să expună în ceea ce urmează cîteva teoreme privind existența, unicitatea, stabilitatea și evaluarea erorilor comise în determinarea soluțiilor aproximative pentru un sistem neliniar care înglobează într-însul numeroase cazuri particulare de probleme de control terminal în prezența operatorilor ereditari și funcționali.

2. Sistemul integro-diferențial funcțional neliniar ce se studiază mai jos are forma

$$(1)\qquad u(s(t),\,t)=\varphi\left[t,\ \int_{\alpha}^{r[t,\,u]} d\tau \int_{a}^{b} K(t,\,\xi,\,\tau,\,u(\xi,\,\tau),\ u(\xi,\,t))\,\mathrm{d}\xi\right]\equiv A[u],$$

$$(2)\qquad u'_x(x,\,t)=f\left[x,\,t,\,u(x,\,t),\ \int_{\alpha}^{r[t,\,u]} M(x,\,t,\,\tau,\,u(x,\,\tau))\mathrm{d}\tau\right]\equiv B[u],$$

[1]) Extras dintr-una din lucrările prezentate la cea de a IV-a Conferință Națională de Mecanică, București, 18—20 decembrie 1975.

$$r[t, u] \equiv r\left[t, \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} P(t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))\mathrm{d}\xi\right],$$

$$f(x, t, s_1, s_2), \quad M(x, t, \tau, s_3), \quad r(t, s_4),$$

$$P(t, \xi, \tau, s_5), \quad s(t), \quad \varphi(t, s_6), \quad K(t, \xi, \tau, s_5, s_1)$$

fiind funcţii definite şi continue în domeniul

$$D = \{a \leqslant \xi, x \leqslant b, \ \alpha \leqslant \tau, t, r(t, s_4) \leqslant \gamma, \ 0 \leqslant |s_i| \leqslant r_i = \text{const}, \\ i = \overline{1, 7}, \ r_1 = r_3 = r_5 = r_1\},$$

ce satisfac în D în raport cu parametrii s_i condiţiile lui Lipschitz cu coeficienţi continui şi non negativi.

Reducînd sistemul (1), (2) la ecuaţia integrală echivalentă

$$(3) \quad u(x, t) = \varphi\left[t, \int_{\alpha}^{r[t, u]} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} K(t, \xi\ \tau, u(\xi, \tau), u(\xi, t))\mathrm{d}\xi + \int_{s(t)}^{x} B[u]\mathrm{d}\eta_i \equiv H[u],\right.$$

rezultă, pentru $\forall(x, t)$, $u^*(x, t) \in D$ astfel încît $H[u^*] \in D$, pentru orice pereche de funcţii continue $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, definiţia normei fiind $\|\cdot\| = \max_D |\cdot|$, inegalitatea

$$k = \left| L_{\varphi}(t)\left[\int_{\alpha}^{r[t, u_1^*]} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{2} L_{iK}(t, \xi, \tau)\mathrm{d}\xi + L_r(t)\int_{\alpha}^{t}\int_{a}^{b} L_P(t, \xi, \tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\right.\right.$$

$$(4) \quad \left.\left.\left|\int_{a}^{b} K(t, \xi, \bar{\tau}, u_2^*(\xi, \bar{\tau})\, u_2^*(\xi, t))\mathrm{d}\xi\right|\right| + \right.$$

$$+ \left|\int_{s(t)}^{x}\left\{L_{1f}(\eta_i, t) + L_{2f}(\eta_i, t)\left[\int_{\alpha}^{r[t, u_1^*]} L_M(\eta_i, t, \tau)\mathrm{d}\tau + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + L_r(t)\int_{\alpha}^{t}\int_{a}^{b} L_P(t, \xi, \tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,|M(\eta_i, t, \tilde{\tau}, u_2^*(\eta_i, \tilde{\tau}))|\right]\right\}\mathrm{d}\eta_i\right|\Bigg\| < 1, \ \bar{\tau}, \ \tilde{\tau} \in [\alpha, \gamma],$$

fapt care permite să conchidem prin următoarea

Teorema 1. *În ipotezele de mai sus, problema neliniară de control terminal* (1), (2) *posedă în D o soluţie şi numai una $u(x, t) \in C^{1,0}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ şi această soluţie se obţine cu un grad de precizie dorit prin aplicarea metodei aproximaţiilor succesive*

$$(5) \quad u_i(x, t) = H[u_{i-1}], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

fiind valabil şirul de inegalităţi

$$(6) \qquad \| u(x, t) - u_i(x, t) \| \leqslant k^i \| u_0(x, t - H[u_0] \| : (1 - k) \underset{i \to \infty}{\to} 0.$$

În cazul cînd funcția $P(t, \xi, \tau, u)$ este supusă unor perturbații devenind o nouă funcție $Q(t, \xi, \tau, v)$, definită și continuă în D și satisfăcînd acolo în raport cu cel de al patrulea argument condițiile de a fi lipschitziană cu coeficient continuu și non negativ $L_Q(t, \xi, \tau)$ și astfel încît are loc inegalitatea

$$(7) \qquad \begin{gathered} | P(t, \xi, \tau, s_5) - Q(t, \xi, \tau, s_8) | \leqslant P_1(t, \xi, \tau) + P_2(t, \xi, \tau) | s_5 - s_8) | , \\ 0 \leqslant s_8 \leqslant r_1, \end{gathered}$$

$P_i(t, \xi, \tau)$, $i = 1, 2$ fiind funcții definite, continue și non negative în D, se conchide, pentru noua funcțională

$$(8) \qquad H_1[v] \equiv A_1[v] + \int_{s(t)}^{x} B[v] \mathrm{d}\eta,$$

ce aplică domeniul D într-o parte a sa și este asociată sistemului neliniar de control terminal în $v(x, t)$

$$(9) \qquad v(s(t), t) = \varphi\left[t, \int_{\alpha}^{s[t, v]} d\tau \int_{a}^{b} K(t, \xi, \tau, v(\xi, t), v(\xi, \tau)) \mathrm{d}\xi\right] \equiv A_1[v],$$

$$(10) \qquad \begin{gathered} v_x'(x, t) = f\left[x, t, v(x, t), \int_{\alpha}^{s[t, v]} M(x, t, \tau)\, v(x, \tau))\, \mathrm{d}\tau\right] \equiv B[v], \\ s[t, v] \equiv s\left[t, \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} Q(t, \xi, \tau, v(\xi, \tau))\, \mathrm{d}\xi\right], \end{gathered}$$

cu următoarea

T e o r e m a 2. *Problema „perturbată“* (9), (10), *posedă, pentru*

$$k_1 = \left\| L_\varphi(t) \left[\int_{\alpha}^{s[t, v_1^*]} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{2} L_{iK}(t, \xi, \tau) \mathrm{d}\xi + L_s(t) \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} L_Q(t, \xi, \tau) \mathrm{d}\xi \right. \right.$$

$$\left. \left. \mathrm{d}\tau \left| \int_{a}^{b} K(t, \xi, \tau', v_1^*(\xi, \tau'), v_1^*(\xi, t)) \, \mathrm{d}\xi \right| \right] + \left| \int_{s(t)}^{x} \left\{ L_{1f}(\eta, t) + L_{2f}(\eta, t) \left[\int_{\alpha}^{s[t, v_1^*]} L_M(\eta, t, \tau) \mathrm{d}\tau + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + L_s(t) \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}\tau \int_{a}^{b} L_Q(t, \xi, \tau) \, \mathrm{d}\xi \right| M(t, \eta, \tau'', v_2^*(\eta, \tau'')) \right] \right\} \mathrm{d}\eta \right| \right\| < 1,$$

o soluție unică $v = v(x, t) \in C^{1,0}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ *și această soluție se obține cu un grad de precizie dorit utilizînd succesiunea*

$$v_i(x, t) = H_1[v_{i-1}], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

$v_i^*(x, t)$, $i = 1, 2$ *fiind funcții continue și arbitrare în* D *și* $\alpha \leqslant \tau', \tau'' \leqslant \gamma$.

Afirmația de mai sus se bazează pe faptul că

$$\| v(x, t) - v_i(x, t) \| \leqslant k_1^i \| v_0(x, t) - H[v_0] \| : (1 - k_1) \underset{i \to \infty}{\to} 0. \tag{12}$$

Într-un mod analog pot fi studiate și cazurile în care se supun perturbațiilor în sistemul (1), (2) și alte funcții decît funcția $P(t, \xi, \tau, u)$.

3. Ne propunem acum să evaluăm modulul diferenței funcțiilor $u(x, t)$ și $v(x, t)$, $\forall (x, t) \in D$. Avem, în primul rînd,

$$\| u(x, t) - v(x, t) \| \leqslant \| A[u] - A_1[v] \| + \left\| \int_{s(t)}^{x} \{B[u] - B_1[v]\} d\eta \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| L_\varphi(t) \right| \int_{\alpha}^{r[t,\, u]} d\tau \int_{a}^{b} K(t, \xi, \tau, u(\xi, t), u(\xi, \tau)) d\xi -$$

$$- \int_{\alpha}^{s[t,\, v]} d\tau \int_{a}^{b} K(t, \xi, \tau, v(\xi, t), v(\xi, \tau)) d\xi \Big| \Big\| + \left\| \int_{s(t)}^{x} \Big\{ L_{1f}(\eta, t) \mid u(\eta, t) - v(\eta, t) \mid + \right.$$

$$\left. + L_{2f}(\eta, t) \Big| \int_{\alpha}^{r[t,\, u]} M(\eta, t, \tau, u(\eta, \tau)) d\tau - \int_{\alpha}^{s[t,\, v]} M(\eta, t, \tau, v(\eta, \tau)) d\tau \Big| \Big\} d\eta \right\|$$

și, presupunînd satisfăcută inegalitatea

$$\lambda = \left\| L_\varphi(t) \Big[\int_{a}^{s[t,\, v]} d\tau \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{2} L_{iK}(t, \tau, \xi) d\xi + L_r(t) \int_{\alpha}^{t} \int_{a}^{b} P_2(t, \xi, \tau) d\xi\, d\tau \cdot \right.$$

$$\left. \Big| \int_{\alpha}^{b} K(t, \xi, \theta, u(\xi, t), u(\xi, \theta)) d\xi \Big| \Big] + \left| \int_{s(t)}^{x} \Big\{ L_{1f}(\eta, t) + L_{2f}(\eta, t) \times \right.$$

$$\left. \times \Big[\int_{\alpha}^{s[t,\, v]} L_M(\eta, t, \tau) d\tau + L_r(t) \int_{\alpha}^{t} \int_{a}^{b} P_2(t, \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \mid M(\eta, t, \tau_1, u(\eta, \tau_1)) \mid \Big] \Big\} d\eta \right\| < 1,$$

se obține, în definitiv,

$$\| u(x, t) - v(x, t) \| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| L_\varphi(t) L_r(t) \int_\alpha^t \int_a^b P_1(t, \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \left| \int_a^b K(t, \xi, \theta, u(\xi, t), u(\xi, \theta))\, d\xi \right| + \right.$$

(13)

$$\left. + \left| \int_{s(t)}^{x} L_{2f}(\eta, t) L_r(t) \int_\alpha^t \int_a^b P_1(t, \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\, d\eta \right| \right\| : (1 - \lambda).$$

Observație. Este normal, dată fiind generalitatea problemei tratate, ca rezultatele obținute să fie exprimate prin expresii îndeajuns de prolixe. Nu se vede deocamdată o ieșire rațională din această stare de lucruri.

Primită la 30 decembrie 1975

Universitatea din Brașov, A. S. E. București, Universitatea de Stat a R. S. S. Kirghizia U.R.S.S. și Institutul politehnic din Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Krivoshein L. E., Kutanov A., Leung K. V., Oguztoreli M. N., Bull. Soc. Math. Belg., **XXVII**, 57—65 (1975).
2. Krivoshein L. E., Leung K. V., Mangeron D., Oguztoreli M. N., Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales (1975).
3. Krivoshein L. E., Mangeron D., Oguztoreli M. N., Saland D., Boll. Unione Mat. Ital., **11**, *1*, 76—83 (1975).
4. * * * Archivum Math., Brno (sub tipar).
5. Chiriacescu S. T., Crudu I., Mangeron D., Oguztoreli M. N., Proc. Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Newcastle upon Tyne, Sept. 8—13, Vol. **5**, pp. 1185—1 189.
6. Bronikowski T. A., SIAM J. Math. Anal., **6**, *1*, 153—167 (1975).
7. Piskorek A., Z. angew Math. und Mech., **55**, *4*, 216—218 (1975).
8. Stein R. B., Leung K. V., Mangeron D., Oguztoreli M. N., Kybernetik, *15*, 1—9 (1974).
9. Oguztoreli M. N., J. Plasma Physics (sub tipar).

TERMINAL CONTROL NONLINEAR PROBLEMS CONTAINING HEREDITARY AND FUNCTIONAL OPERATORS

(Summary)

In the framework of their research papers devoted to studies of nonlinear systems containing hereditary, polywave and polycaloric operators [1]—[4], the authors expose in the present paper the existence, the unicity, the stability and the evaluation of the commited errors theorems concerning terminal control nonlinear problems with hereditary and functional operators given by (1), (2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 512.9 : 517.947

ARBITRARY ORDER DERIVATIVES FOR FUNCTIONS REPRESENTABLE BY ALGEBRAS

BY

ALFRED BRAIER

1. Any real valued function $f(x) \in C$, with the property that its derivatives belong to the same class, i. e. $\forall n \in N$, $f^{(n)}(x) \in C$, can be represented symbolically by $w \in A$, element of an associative algebra A on the real field R, with unity element, [1]. The correspondences are

$$f(x) \leftrightarrow w, \quad \frac{df}{dx} \leftrightarrow dw, \quad \ldots, \quad \frac{d^n f}{dx^n} \leftrightarrow d^n w, \tag{1}$$

where $d \in A$ is the element playing the rôle of a derivation operator, relative to the class C of functions.

Since for $\forall \gamma \in R$, $d^\gamma \in A$, we shall now extend the concept of derivative and call derivative of (arbitrary) order γ of $f(x)$, or γ - derivative, the function $f^{(\gamma)}(x)$ which corresponds to $d^\gamma w$:

$$f^{(\gamma)}(x) \leftrightarrow d^\gamma w. \tag{2}$$

The usual derivatives result for γ positive integer; if γ is a negative integer, we get the repeated integral over $f(x)$ (obviously with vanishing initial conditions).

In order to obtain easily and directly the γ - power of element d, it is necessary to write it in the exponential form [1]

$$d = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \varepsilon_i = \prod_{i=1}^{n} e^{k_i \varepsilon_i}, \tag{3}$$

where $\varepsilon_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are the elements of the basis choosen in A; $\delta_i \in R$ and $k_i \in R$ are respectively the components of d in that basis and in the exponential form. Then

$$d^\gamma = \prod_{i=1}^{n} e^{\gamma k_i \varepsilon_i}. \tag{4}$$

Let put also $w \leftrightarrow f(x)$ in the same exponential form and perform the product $d^\gamma w = w^{(\gamma)}$. The correspondence between elements of A and functions from C gives immediately $f^{(\gamma)}(x)$.

The technique for performing the correspondences $f(x) \leftrightarrow w$ for various types of functions are described in detail in [1]. We shall remind here some results and utilise them in order to obtain the form of an arbitrary order derivative for a number of functions representable by algebras.

2. The function

$$f(x) = Ae^{\delta x} \sin(\omega x + \alpha) \tag{5}$$

are represented symbolically by a complex number $w = a_1 + ja_2$ ($j^2 = -1$), with the derivation operator d, given by

$$w = Ae^{j\alpha}, \qquad d = \delta + \omega j. \tag{6}$$

Let put d in the familiar exponential form

$$d = De^{j\varphi} \qquad \text{with} \qquad D = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}. \tag{7}$$

Then, for $\gamma \in R$,

$$d^\gamma = (\delta^2 + \omega^2)^{\frac{\gamma}{2}} e^{j\gamma \tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}} \tag{8}$$

and $w^{(\gamma)} = d^\gamma w$, i. e.

$$w^{(\gamma)} = A(\delta^2 + \omega^2)^{\frac{\gamma}{2}} e^{j\left(\alpha + \gamma \tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}\right)}. \tag{9}$$

The correspondence between (6_1) and (5) gives for the derivative

$$f^{(\gamma)}(x) = A(\delta^2 + \omega^2)^{\frac{\gamma}{2}} \sin\left(\omega x + \alpha + \gamma \tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}\right). \tag{10}$$

For $\delta = 0$, (5) becomes an usual harmonic function.

3. The function

$$f(x) = (Ax + B)e^{\delta x} \sin(\omega x + \alpha) \tag{11}$$

are represented symbolically by an element of Sobrero algebra, namely

$$w = Ae^{u\frac{B}{A}} e^{j\alpha} \qquad \text{with} \qquad d = \delta + u + \omega j, \tag{12}$$

where $u^2 = 0$, $j^2 = -1$, $uj = ju$ and

$$e^{u\lambda} = 1 + u\lambda, \qquad e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi, \qquad e^{uj\mu} = 1 + uj\mu. \tag{13}$$

According to previous results (see [1]), the exponential form of an element $d = d_1 + d_2 u + d_3 j + d_4 ij$ is

$$\begin{cases} d = De^{uD_2} e^{jD_3} e^{ujD_4} & \text{with} \qquad D = \sqrt{d_1^2 + d_3^2}, \\ D_2 = \dfrac{d_1 d_2 + d_3 d_4}{d_1^2 + d_3^2}, \quad D_4 = \dfrac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1^2 + d_3^2}, & D_3 = \tan^{-1}\dfrac{d_3}{d_1}. \end{cases} \tag{14}$$

For the derivation operator (12_1) we get

$$(15)\quad D=(\delta^2+\omega^2)^{1/2},\quad D_2=\frac{\delta}{\delta^2+\omega^2},\quad D_3=\tan^{-1}\frac{\omega}{\delta},\quad D_4=-\frac{\omega}{\delta^2+\omega^2}.$$

It means that

$$(16)\qquad d^\gamma=(\delta^2+\omega^2)^{\frac{\gamma}{2}}e^{u\gamma\frac{\delta}{\delta^2+\omega^2}}e^{j\gamma\tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}}e^{-uj\gamma\frac{\omega}{\delta^2+\omega^2}}.$$

If we multiply (12_1) and (16), taking in account also (13), we find finally

$$(17)\quad w^{(\gamma)}=A(\delta^2+\omega^2)^{\frac{\gamma}{2}}\left[1+\left(\frac{B}{A}+\gamma\frac{\delta}{\delta^2+\omega^2}\right)u-\gamma\frac{\omega}{\delta^2+\omega^2}uj\right]e^{j\left(\alpha+\gamma\tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}\right)}.$$

We know that with d (12_1) as derivation operator, an element of Sobrero algebra $w=(M+Nu+Puj)e^{j\varphi}$ represents symbolically the function $f(x)=e^{\delta x}[(Mx+N)\sin(\omega x+\varphi)+P\cos(\omega x+\varphi)]$. It results therefore

$$(18)\quad f^{(\gamma)}(x)=(\delta^2+\omega^2)^{\frac{\gamma}{2}}e^{\delta x}\left[\left(Ax+B+\gamma\frac{\delta A}{\delta^2+\omega^2}\sin\left(\omega x+\alpha+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\gamma\tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}\right)-\gamma\frac{\omega A}{\delta^2+\omega^2}\cos\left(\omega x+\alpha+\gamma\tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}\right)\right)\right].$$

4. Let be the function

$$(19)\qquad f(x)=Ae^{\delta x}\sin(px+\beta)\sin(\omega x+\alpha)$$

representable by an element of the direct product of two complex algebras, namely

$$(20)\qquad w=Ae^{i\beta}e^{j\alpha}\quad\text{with}\quad d=\delta+pi+\omega j,$$

where $i^2=j^2=-1$, $ij=ji$ and

$$(21)\qquad e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta,\qquad e^{ij\lambda}=\cosh\lambda+ij\sinh\lambda.$$

The exponential form of an element $D=d_1+d_2i+d_3j+d_4ij$ is

$$(22)\quad\begin{cases}d=De^{i\Psi}e^{j\Phi}e^{ij\Lambda}\quad\text{with}\\ D=\sqrt[4]{[(d_1-d_4)^2+(d_2+d_3)^2]\,[(d_1+d_4)^2+(d_2-d_3)^2]},\\ \tan\Psi=\dfrac{D^2-(d_1^2-d_2^2+d_3^2-d_4^2)}{2(d_1d_2+d_3d_4)},\quad\tan\Phi=\dfrac{D^2-(d_1^2+d_2^2-d_3^2-d_4^2)}{2(d_1d_3+d_2d_4)},\\ \tanh\Lambda=\dfrac{D^2-(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)}{2(d_2d_3-d_1d_4)}.\end{cases}$$

We get for the derivation operator

$$(23)\quad \begin{cases} D=\{[\delta^2+(\omega+p)^2]\,[\delta^2+(\omega-p)^2]\}^{\frac{1}{4}}, \quad \tanh\Lambda=\dfrac{D^2-(\delta^2+\omega^2+p^2)}{2\omega p}, \\ \tan\Psi=\dfrac{D^2-(\delta^2+\omega^2-p^2)}{2\delta p}, \quad \tan\Phi=\dfrac{D^2-(\delta^2-\omega^2+p^2)}{2\delta\omega}. \end{cases}$$

Then

$$(24)\quad d^\gamma = D^\gamma\, e^{i\gamma\Psi}\, e^{j\gamma\Phi}\, e^{ij\gamma\Lambda},$$

with D, Ψ, Φ and Λ given by (23). Having in mind (20_1) it results

$$w^{(\gamma)} = AD^\gamma\, e^{i(\beta+\gamma\Psi)}\, e^{j(\alpha+\gamma\Phi)}\, e^{ij\gamma\Lambda}.$$

The relation (13_3) allows to write

$$(25)\quad w^{(\gamma)} = AD^\gamma(\cosh\gamma\Lambda + ij\sinh\gamma\Lambda)e^{i(\beta+\gamma\Psi)}\, e^{j(\alpha+\gamma\Phi)}.$$

We know that with the derivation operator (20_2) an element $w = (A_1 + A_2 ij)e^{i\Psi}e^{j\Phi}$ represents symbolically the function

$$f(x) = [A_1\sin(px+\Psi)\sin(\omega x+\Phi) + A_2\cos(px+\Psi)\cos(\omega x+\Phi)]e^{\delta x}.$$

Hence, the γ - derivative of (19) is

$$(26)\quad \begin{aligned} f^{(\gamma)}(x) = AD^\gamma\, e^{\delta x}\,[&\cosh\gamma\Lambda\sin(px+\beta+\tan^{-1}\gamma\Psi)\sin(\omega x+\alpha+\tan^{-1}\gamma\Phi)+ \\ &+\sinh\gamma\Lambda\cos(px+\beta+\tan^{-1}\gamma\Psi)\cos(\omega x+\alpha+\tan^{-1}\gamma\Phi)]. \end{aligned}$$

Received November 25, 1975

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *New Algebraic Method in Dynamic Systems.* CISM, Udine, 1972.

DERIVATE DE ORDIN ARBITRAR ALE FUNCȚIILOR REPREZENTABILE PRIN ALGEBRE

(Rezumat)

Se introduce derivata de ordin arbitrar γ ($\gamma \in R$) a unei funcții reprezentabile printr-un element al unei algebre pe corpul real; ea corespunde elementului $w^{(\gamma)} = d^\gamma w$, în care w este atașat funcției iar d este elementul cu rol de operator de derivare [1]. Se consideră ca exemple funcțiile (5), (11) și (19).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 513.8

OBSERVATIONS ON ANALYZING THE STRUCTURE OF EXPERIMENTAL GRAPHS

BY

JUHANI NIEMINEN

1. Introduction

In the basic papers of Mirkin [1] and Muchnik [2], it is looked for a reasonable way of grouping the vertices of an undirected graph G (the elements of $n \times n$ Boolean relation matrix) such that after grouping the vertices in G, G is as good approximation of a given simple model graph as possible. As shown in [1] and [2], the grouping process has many applications in economic and social sciences. The purpose of this note is to give a formulation for the grouping problem in terms of graph theory and then derive a criterion for detecting a good approximation graph. The criterion is a slight modification of those in [2] and [1], but as the problem formulation will show, it contains some essential improvements.

At first we shall briefly recall the problem formulation given in [2]. Thereafter we shall give a new formulation in terms of graph theory and show what kind of phenomenon the criterion in [2] measures. Finally the revised criterion will be formulated and some elementary examples considered.

By a dierected graph G, briefly a graph G, we mean the pair $(V(G), E(G))$, where $V(G) = \{a, b, \ldots\}$ is the set of vertices of G and $E(G)$ the set of its edges. $E(G)$ consists of ordered pairs (a, b) of vertices of G, i. e. $(a, b) \in E(G)$ if and only if there is in G a directed edge from a to b. $A_G = [\alpha_{ij}]$ denotes the adjacency matix of a graph G. In A_G the columns and rows correspond to vertices v_i and v_j of G, and $\alpha_{ij} = 1$, if there is in G a directed edge from v_i to v_j; in all other cases $\alpha_{ij} = 0$.

If B is a set, $|B|$ denotes the number of elements in B.

2. A Description of the Method

In this section we briefly recall the method used in [2].

Let G be a given graph, $|V(G)| = p$, and let $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ be m groups of vertices of G, $m \leq p$, such that $\bigcup Z_i \subseteq V(G)$, a set Z_i may

be empty, and the intersection $Z_i \cap Z_j$ need not be empty. Let $H = (V(H), E(H))$, $|V(H)| = m$, be another given graph, and assume that there is given a fixed one-to-one correspondence between the sets in $\mathcal{Z}$ and the elements $\{y_1, \ldots, y_m\}$ of $V(H)$.

From G and $\mathcal{Z}$ we construct a new graph $G(H, \mathcal{Z}) = (V(H, \mathcal{Z}), E(H, \mathcal{Z}))$ approximating the structure of H (H is called the simplification of $G(H, \mathcal{Z})$ and G) as follows: An edge $(v_i, v_j) \in E(H, \mathcal{Z})$ if and only if there are two sets Z_r and Z_1 such that $v_i \in Z_r$, $v_j \in Z_1$, and $(y_r, y_1) \in E(H)$, where y_r corresponds to Z_r and y_1 to Z_1. We denote the adjacency matrix of $G(H, \mathcal{Z})$ by $A_{H\mathcal{Z}} = [\beta_{ij}]$.

The goodness of the grouping $\mathcal{Z}$ detecting the structure of H in G is tested by the expression

$$J_{H\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} |\alpha_{ij} - \beta_{ij}|. \tag{1}$$

The best allocation $\mathcal{Z}$ of vertices in G with respect to the given simplification H of G over all possible allocations $\mathcal{Z}$ of $V(G)$ is obtained when $J_{H\mathcal{Z}}$ reaches its minimum.

3. A Problem Formulation

Let G be a given graph and $\mathcal{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ a grouping of the vertices in G. Each $\mathcal{Z}$ of $V(G)$ induces a mapping f from G onto a graph $f(G) = (V_{fG}, E_{fG})$ defined as follows: $V_{fG} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ and $(Z_i, Z_j) \in E_{fG}$ only if there is in Z_i a vertex v_i and in Z_j a vertex v_j of G such that $(v_i, v_j) \in E(G)$.

Let f be the mapping induced by a grouping $\mathcal{Z}$. If for each $(Z_i, Z_j) \in E_{fG}$ and for each $v_i \in Z_i$ there is a vertex $v_j \in Z_j$ such that $(v_i, v_j) \in E(G)$, f is called regular. Moreover, if f is regular and if for each $(Z_i, Z_j) \in E_{fG}$ and for each $v_j \in Z_j$ there is a vertex $v_i \in Z_i$ such that $(v_i, v_j) \in E(G)$, f is called strongly regular. Finally, if f is regular (strongly regular), $Z_i \cap Z_j = \varnothing$ for each pair i, j, $i \neq j$, and $\bigcup_i Z_i = V(G)$, f is called a homomorphism (a strong homomorphsim) from G onto $f(G)$.

Let H be another given graph, $|V(H)| = m$ and $H = f(G)$. According to the classification of the mappings f considered above, we shall call H a simplification, a regular simplification, a strongly regular, or a homomorphic (strongly homomorphic) simplification of G.

The graphs in Figures 1, 2, 3, and 4 illuminate differences between the various mappings defined above.

Let f be a mapping from a given graph G onto $f(G)$ and let $\mathcal{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ be the grouping of the vertices of G inducing the mapping f. For each regular mapping f we can find an extreme graph G° with a maximum number of edges such that $V(G^\circ) = V(G)$, $E(G) \subseteq E(G^\circ)$, and f maps G° onto $f(G)$ with same grouping $\mathcal{Z}$ of vertices of G° as of G. The edges of these extreme graphs follow the rules:

(I) Let f be regular. If $(Z_i, Z_j) \in E_{fG}$, then from each $v_i \in Z_i$ there is in G an edge to each vertex $v_j \in Z_j$.

(II) Let f be strongly regular. If $(Z_i, Z_j) \in E_{fG}$, then from each $v_i \in Z_i$ there is in G an edge to each vertex $v_j \in Z_j$, and for each $v_j \in Z_j$ there is in G an edge (v_i, v_j) where v_i ranges over the set Z_j.

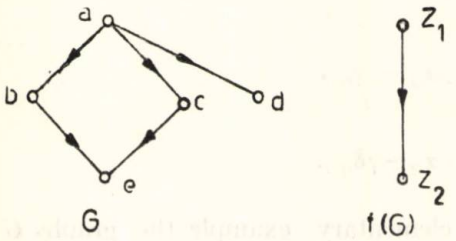

Fig. 1. — f, $Z_1 = \{a, b, c, d\}$, $Z_2 = \{b, c, e\}$.

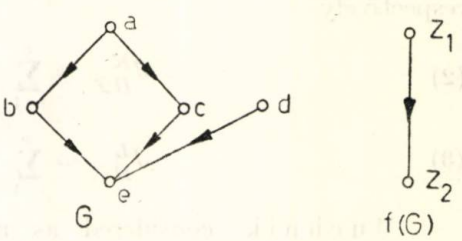

Fig. 2. — f regular, $Z_1 = \{a, b, c, d\}$, $Z_2 = \{b, c, e\}$.

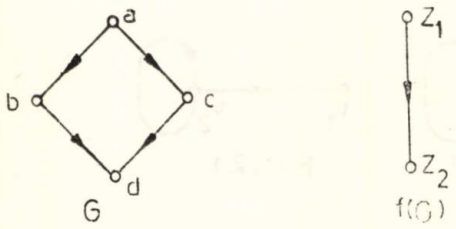

Fig. 3. — f strongly regular, $Z_1 = \{a, b, c\}$, $Z_2 = \{c, d, e\}$.

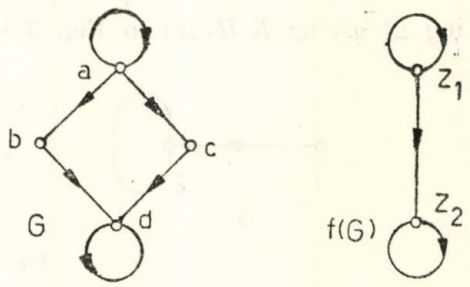

Fig. 4. — f strong homomorphism, $Z_1 = \{a, b\}$, $Z_2 = \{c, d\}$.

The definition of the graph $G(H, \mathcal{Z})$ in [2] shows that the best grouping $\mathcal{Z}$ can be found when there is a regular mapping f from G onto H and, besides this, G is an extreme graph such as defined in (I). As the definition of a regular mapping shows, the condition used in the method of [2] is too strong, since already all the graphs G for which $f(G) = H$, f regular, has the structure analogous to that of H. Hence the criteria for finding good approximations when G and H are given can be formulated as follows:

Regular case: Let $\mathcal{Z}$ be the given grouping of $V(G)$ corresponding to the vertices of H, $V(H) = \{y_1, ..., y_m\}$. In the graph $K(H, \mathcal{Z}) = (V(K), E(K))$, $V(K) = V(G)$ and $(v_i, v_j) \in E(K)$, if (i) $(v_i, v_j) \in E(G)$, $v_i \in Z_i$, $v_j \in Z_j$ and $(y_i, y_j) \in E(H)$, and if (ii) $(v_i, v_j) \notin E(G)$ for any $v_i \in Z_j$, then v_i is joined to an arbitrary $v_j \in Z_j$ in $K(H, \mathcal{Z})$. The adjacency matrix of $K(H, \mathcal{Z})$ is denoted by $A_K = [\gamma_{ij}]$.

Strongly regular case: Let $\mathcal{Z}$ be the given grouping of $V(G)$ corresponding to the vertices of H, $V(H) = \{y_1, ..., y_m\}$. In the graph $L(H\ \mathcal{Z}) = (V(L), E(L))$, $V(L) = V(G)$ and $(v_i, v_j) \in E(L)$ if (i) $(v_i, v_j) \in E(G)$, $v_i \in Z_i$, $v_j \in Z_j$ and $(y_i, y_j) \in E(H)$. If (ii) $(v_i, v_j) \notin E(G)$ for any $v_j \in Z_j$, then v_i is joined to an arbitrary $v_j \in Z_j$ in $L(H, \mathcal{Z})$, and if (iii) $(v_i, v_j) \notin$

$\notin E(G)$ for any $v_i \in Z_i$, then v_j is joined to an arbitrary $v_i \in Z_i$ in $L(H, \mathcal{Z})$. The adjacency matrix of $L(H, \mathcal{Z})$ is denoted by $A_L = [\delta_{ij}]$.

The goodness of the approximations $K(H, \mathcal{Z})$ and $L(H, \mathcal{Z})$ are tested similarly as in [2] by calculating the values of the expressions (2) and (3), respectively

$$J^K_{H\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} |\alpha_{ij} - \gamma_{ij}|, \tag{2}$$

$$J^L_{H\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} |\alpha_{ij} - \gamma\delta_{ij}|. \tag{3}$$

Muchnik considered as an elementary example the graphs G and H of Fig. 5. The grouping $\mathcal{Z} = \{Z_1\}$, where $Z_1 = \{v_1, v_2\}$ gives according to the rules of the regular case, the graph $K(H, \mathcal{Z})$ of Fig. 5. Hence H is a regular simplification of G with $J^K_{H\mathcal{Z}} = 0$, and so the grouping $\mathcal{Z}$ giving $K(H, \mathcal{Z})$ in Fig. 5 is one of the best.

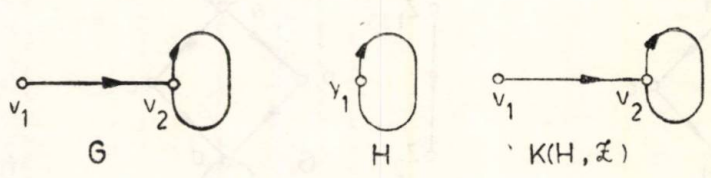

Fig. 5

It should be noted that the computations are always laborious and expensive because of the great number of the possible groupings and the correspondences between the elements in $\mathcal{Z}$ and $V(H)$. A way of organizing the computations is described in [2].

Received 23 September 1975

Finnish Academy,
Department of Technical Sciences,
Helsinki, Finland

REFERENCES

1. Mirkin B. G., *Approximation Problems in a Relation Space and the Analysis of Nonnumeric Methods.* Automation and Remote Control, 1974, **35**, *9*, part 1, 1 424—1 431 (Translation from Автоматика и телемеханика, *9* (1974)).
2. Muchnik I. B., *Analysis of Structures of Experimental Graphs.* Automation and Remote Control, 1974, **35**, *9*, part 1, 1 432—1 447 (Translation from Автоматика и телемеханика, *9* (1974)).

OBSERVAŢII ASUPRA ANALIZEI GRAFURILOR EXPERIMENTALE

(Rezumat)

Se prezintă o formularea în termenii teoriei grafurilor a problemei grupării vîrfurilor unui graf neorientat. Pe această bază se stabileşte un criteriu de depistare a unui graf de bună aproximare, care ameliorează esenţial criteriul dat în [1] şi [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 513.3.

ALGEBRAISCHE GESICHTSPUNKTE DER GRAPHENTHEORIE

VON

CARMEN ZITRON

1. Graphdefinition

Definition 1.1. *Ein gerichteter Graph, bezeichnet* $\vec{G}$, *ist ein Tripel* (G, α, β), *wobei* G *eine Klasse von Objekten ist,* α *und* β *vollständige einstellige Abbildungen* $\alpha, \beta : G \to G$ *sind, die folgende Bedingungen*:

$$\alpha\alpha = \alpha, \quad \alpha\beta = \beta, \quad \beta\alpha = \alpha, \quad \beta\beta = \beta, \tag{1}$$

genügen.

Definition 1.2. *Jedes Element der Menge* $G_0 = \alpha(G) \cup \beta(G)$ *heißt ein Eckpunkt von* $\vec{G}$.

Definition 1.3. *Die Elemente* $X \in G - G_0$ *werden gerichtete Kanten von* $\alpha(x)$ *nach* $\beta(x)$ *genannt und werden mit* $\vec{x} = (\alpha(x), x, \beta(x))$ *bezeichnet.*

Definition 1.4. *Ein doppelt-gerichteter Graph* $\overleftrightarrow{G} = (G, \alpha, \beta, \gamma)$ *ist eine algebraische Struktur vom Typ* $< 1, 1, 1 >$ *mit den drei vollständigen einstelligen Abbildungen* α, β *und* γ, *von* G *in* G, *die Bedingungen* (1) *und* (2) *genügen*:

$$\alpha\gamma = \beta, \quad \beta\gamma = \alpha \text{ und } \gamma(e) = e, \quad \forall e \in G_0. \tag{2}$$

Beispiel 1.1. Jede Gruppe kann als doppelt-gerichteter Graph betrachtet werden.

Es sei (G, e) eine multiplikative Gruppe. Man definiert die Abbildungen

$$\alpha, \beta : G \to G \text{ durch } \alpha(x) = \beta(x) = e, \quad \forall x \in G.$$

Die Bedingungen (1) prüfen sich direkt.

Weiterhin, sei

$$\gamma : G \to G \text{ durch } \gamma(x) = x^{-1} \text{ definiert,}$$

dann finden auch die Gleichungen (2) statt.

Beispiel 1.2. Es wird ein Einheitsring J betrachtet und man bezeichnet mit M die Menge der rechteckigen Matrizen mit Elementen aus J. Man kann:

$$\alpha, \beta : M \to M$$

$$\alpha(A_{m\times n}) = E_{m\times m} = \begin{pmatrix} e & 0 \dots 0 \\ 0 & e \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots e \end{pmatrix}_{m\times m}$$

$$\beta(A_{m\times n}) = E_{n\times n} = \begin{pmatrix} e & 0 \dots 0 \\ 0 & e \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots e \end{pmatrix}_{n\times n}$$

definieren, die die Menge M als gerichteter Graph organisiert ($A_{m\times n}$ ist eine rechteckige Matrix mit den Dimensionen $m\times n$ mit Elementen aus J).

Wird auch die Abbildung $\gamma : M \to M$ betrachtet, wobei $\gamma(A_{m\times n}) = A'_{n\times m}$ (die transponierte Matrix), dann stellt man leicht, daß M ein doppelt-gerichteter Graph wird, fest.

2. Homomorphe Abbildungen von Graphen

Es seien $\vec{G}_1 = (C_1, \alpha_1, \beta_1)$ und $\vec{G}_2 = (C_2, \alpha_2, \beta_2)$ zwei gerichtete Graphen.

Defenition 2.1. *Man nennt homomorphe Abbildung des Graphen* $\vec{G}_1$ *im Graphen* $\vec{G}_2$ *eine Abbildung* $\varphi : C_1 \to C_2$ *mit den Eigenschaften*:

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha_1} = \alpha_2\varphi, \\ \varphi_{\beta_1} = \beta_2\varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Satz 2.1. *Die Zusammensetzung von zwei homomorphe Abbildungen von Graphen ist ebenfalls eine homomorphe Abbildung von Graphen.*

Wenn $\vec{G}_i = (C_i, \alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, 3$ gerichtete Graphen und $\varphi : \vec{G}_1 \to \vec{G}_2$ $\psi : \vec{G}_2 \to \vec{G}_3$ homomorphe Abbildungen sind, dann folgt:

$$(\psi\varphi)\alpha_1 = \psi(\varphi\alpha_1) = \psi(\alpha_2\varphi) = (\psi\alpha_2)\varphi = (\alpha_3\psi)\varphi = \alpha_3(\psi\varphi)$$

und $(\psi\varphi)\beta_1 = \beta_3(\psi\varphi)$.

Defenition 2.2. *Man nennt ternäre Halbgruppe eine Menge die eine innere ternäre Operation bezeichnet* $[a, b, c]$ *besitzt und den Assoziativitätssatz*:

$$[[abc]de] = [a[bcd]e] = [ab[cde]] \tag{4}$$

genügt.

Wenn $\vec{G}_1$ und $\vec{G}_2$ zwei gerichtete Graphen sind, man bezeichnet mit:

$$\begin{cases} S_1 = \{\varphi, \varphi_{\text{homom}} : \vec{G}_1 \to \vec{G}_2\}, \\ S_2 = \{\psi, \psi_{\text{homom}} : \vec{G}_2 \to \vec{G}_1\}, \\ S = S_1 \times S_2 = \{(\varphi, \psi),\ \varphi \in S_1,\ \psi \in S_2\}. \end{cases} \tag{5}$$

S a t z 2.2. *Die Menge S ist eine ternäre Halbgruppe mit der Operation*:

$$[(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3)] = (\varphi_1\psi_2\varphi_3, \psi_1\varphi_2\psi_3). \tag{6}$$

Der Beweis folgt durch Verifizierung der Gleichung (4).

3. Wege in einem Graph

Es sei $\vec{G} = (G, \alpha, \beta)$ ein gerichteter Graph, e_i und e_k zwei seiner Eckpunkte und $x_1, \ldots, x_n$ Kanten in $\vec{G}$.

D e f e n i t i o n 3.1. *Ein Weg über* $\vec{G}$ *wird eine Folge von der Form* $w(e_i, x_1, \ldots, x_n, e_k)$ *genannt, die die Bedingungen*:

$$\alpha(x_1) = e_i, \quad \beta(x_j) = \alpha(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad \beta(x_n) = e_k$$

genügt.

D e f e n i t i o n 3.2. *Die Anzahl der Kanten die den Weg w bilden heißt seine Länge.*

Man erlangt auf dieser Weise zur Abbildung:

$$\Lambda : \vec{F} \to N \tag{7}$$

wobei man mit $\vec{F}$ die Klasse der Wege über $\vec{G}$ und mit N die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnete, die durch

$$\Lambda(w) = \Lambda((e_i, x_1, \ldots, x_n, e_k)) = n$$

definiert ist.

Man zeigt (see [1]), daß man $\vec{F}$ als Kategorie organisieren kann, die sogenannte *freie Kategorie über* $\vec{G}$ (der Begriff von Kategorie sowie der von Graph sind in [1] eingeführt).

Im folgenden wird eine Äquivalenz auf $\vec{F}$ definiert und die Menge Quotient als Kategorie organisiert.

D e f e n i t i o n 3.3. *Wenn* $w_1, w_2 \in \vec{F}$ *man sagt daß* $w_1 \sim w_2$ *genau dann wann*

$$\alpha(w_1) = \alpha(w_2) \quad \text{und} \quad \beta(w_1) = \beta(w_2). \tag{8}$$

S a t z 3.1. *Die Beziehung* (8) *ist eine Kongruenz in* $\vec{F}$.

B e w e i s. Man zeigt leicht, daß (8) eine Äquivalenzrelation ist. Es sei, mehr noch $w_1 \sim w_2$, $w_3 \sim w_4$ und so, daß es w_1w_3 und w_2w_4 existiert (Zusammensetzung in $\vec{F}$).

Es folgt, weil $\vec{F}$ eine Kategorie ist, daß

$$\alpha(w_1w_3) = \alpha(w_1) = \alpha(w_2) = \alpha(w_2w_4)$$

und gleichartig

$$\beta(w_1w_3) = \beta(w_2w_4).$$

Satz 3.2. *Die Menge Quotient, $\vec{F}/\sim$, ist eine Kategorie.*

Beweis. Es werden die Abbildungen α, $\beta : \vec{F}/\sim \to \vec{F}/\sim$ durch

$$\alpha(C_w) = C_{(\alpha(x_1),\alpha(x_1))}, \quad \beta(C_w) = C_{(\beta(x_n),\beta(x_n))}$$

definiert, wobei man mit C_w die Äquivalenzklasse aus $\vec{F}$ die den Weg $w = (e_i, x_1, ..., x_n, e_k)$ enthält, bezeichnete.

α und β sind eindeutig (man prüft durch unmittelbarer Rechnung).

Im folgenden wird die partiell definierte Zusammensetzung φ betrachtet:

$$\varphi : \vec{F}/\sim \times \vec{F}/\sim \to \vec{F}/\sim$$

bezeichnet „$\circ$", sodaß:

$$\exists C_{w_1} \circ C_{w_2} \Leftrightarrow (\beta C_{w_1}) = \alpha(C_{w_2}) \Leftrightarrow C_{(\beta(x_n),\beta(x_n))} = C_{(\alpha(y_1),\alpha(y_1))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta(x_n) = \alpha(y_1) \Leftrightarrow \exists w_1 \circ w_2 \text{ in } \vec{F},$$

$$w_1 = (\alpha(x_1), x_1, ..., x_n, \beta(x_n)),$$

$$w_2 = (\alpha(y_1), y_1, ..., y_n, \beta(y_n)).$$

Dann ist:

$$\varphi(C_{w_1}, C_{w_2}) = C_{w_1} \circ C_{w_2} = C_{w_1w_2}.$$

Der Satz 3.1 zeigt, daß die definierte Operation nicht von den gewählten Vertreter in den Klassen die sich zusammensetzen abhängig ist.

Somit ist die Axiome K1 (see [1]) verifiziert.

Aus

$$(\alpha\beta)(C_{w_1}) = \alpha(C_{(\beta(x_n),\beta(x_n))} = C_{(\alpha\beta(x_n),\alpha\beta(x_n))} = C_{(\beta(x_n),\beta(x_n))} = \beta(C_{w_1})$$

folgt $\alpha\beta = \beta$, also K2.

Es sei

$$\alpha(C_{w_1} \circ C_{w_2}) = \alpha(C_{w_1w_2}) = \alpha(C_{(\alpha(x_1),\ldots,\beta(y_n))}) = C_{(\alpha\alpha(x_1),\,\alpha\alpha(x_1))} = C_{(\alpha(x_1),\,\alpha(x_1))} = \alpha(C_{w_1}),$$

also K3.

Die Axiome K4 findet ebenfalls statt wie man durch Rechnung unmittelbar prüft.

Endlich

$$\alpha(C_w) \circ C_w = C_{(\alpha(x_1),\,\alpha(x_1))} \circ C_w = C_{(\alpha(x_1),\alpha(x_1))\circ w} = C_w$$

also K5.

Derart die ist Aussage vollständig beweist.

D e f e n i t i o n 3.4. *Es werden die Kategorien* $\vec{C}_1$ *und* $\vec{C}_2$ *betrachtet. Man nennt kovarianten Funktor eine Abbildung* $\varphi : \vec{C}_1 \to \vec{C}_2$ *die, wenn die Zusammensetzung* xy *existiert, die Bedingungen:*

$$\Phi\alpha_1 = \alpha_2\Phi, \quad \Phi\beta_1 = \beta_2\Phi, \quad \Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y)$$

genügt.

S a t z 3.3. *Es existiert ein kovarianter Funktor* $\Gamma : \vec{F} \to \vec{F}/$ *der freien Kategorie* $\vec{F}$ *auf der Faktorkategorie bezüglich der Aquivalenz* $\sim$ *(Definition 3.3).*

B e w e i s.

$$\Gamma(w) = C_w$$

dann ist:

$$(\Gamma\alpha)(w) = \Gamma(\alpha(w)) = C_{\alpha(w)}$$

wobei:

$$w = (\alpha(x_1), x_1, \ldots, x_n, \beta(x_n)),$$

also $\Gamma\alpha = \alpha\Gamma$, gleichartig $\Gamma\beta = \beta\Gamma$.

Wenn in $\vec{F}$ auch $w_1 \circ w_2$ existiert dann ist:

$$\Gamma(w_1 \circ w_2) = C_{w_1 \circ w_2} = C_{w_1} \circ C_{w_2} = \Gamma(w_1) \circ \Gamma(w_2).$$

Eingegangen am 21. November 1975

Universität Jassy,
Lehrstuhl für Algebra und
operationelle Untersuchung

LITERATURVERZEICHNIS

1. H a s s e M., *Zur allgebraische Begründung der Graphentheorie* (I). Math. Nach., **XXVIII**, 275—290 (1962).
2. H a s s e M., *Zur allgebraische Begründung der Graphentheorie* (II). Math. Nach., **XXX**, 155—164 (1965).

ASPECTE ALGEBRICE ÎN TEORIA GRAFURILOR

(Rezumat)

Utilizînd definiţia grafului şi a categoriei sub forma dată de M. H a s s e în [1], lucrarea de faţă prezintă un exemplu de semigrup ternar şi construieşte, plecînd de la categoria liberă asociată unui graf, G, o categorie factor şi un functor corespunzător ei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 517.948

PROBLÈMES CONCERNANT DIFFÉRENTES CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRODIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES DE MANGERON (II)

PAR

D. D. BAINOV, R. CHALÉAT, L. E. KRIVOCHÉINE et D. SALANDI

À. M. le Professeur D. Mangeron pour son 70-e anniversaire

1. Les auteurs, tout en continuant la série de leurs études concernant différentes classes d'équations de Mangeron [1]—[5], qui ont trouvé d'or et déjà nombre d'applications, telles, par ex., calcul automatique des surfaces de forme quelconque [6]—[7] ou bien étude de certains processus qui ont lieu dans le plasma [8], considèrent dans ce qui suit, tout en s'appuyant sur une méthode élaborée dans [3], le problème de la détermination des solutions d'un système intégro-différentiel non linéaire de Mangeron, tant que celui de la recherche de ses solutions approximatives, de l'établissement des erreurs commises et de la stabilité par rapport à certains perturbations des coefficients du système considéré.

2. On cosidère le système intégrodifférentiel polyvibrant de Mangeron

$$M^2[u(x,t)] = f[x,t,u(x,t),M[u(x.t)],\int_{p(x)}^{g(x)} K(x,t,\xi,u(\xi,t),u'_t(\xi,t))\mathrm{d}\xi,$$

$$\int_{\sigma(t)}^{\lambda(t)} P(x,t,\tau,u(x,\tau),u'_x(x,\tau))\mathrm{d}\tau], \tag{1}$$

$$u(x,\alpha)=\varphi(x),\quad u(a,t)=\psi(t),\quad \varphi(a)=\psi(\alpha)=p_1, \tag{2}$$

$$u'_x(a,t)=s(t),\quad u'_t(x,\alpha)=\mu(x),\quad s'(\alpha)=\mu'(a)=p_2, \tag{3}$$

où $M[\,\cdot\,] \equiv \partial^2/\partial x\,\partial t$ et les fonctions $f(x,t,s_1,s_2,s_3,s_4)$, $K(x,t,\xi,s_5,s_6)$, $P(x,t,\tau,s_7,s_8)$, $p(x)$, $g(x)$, $\sigma(t)$, $\lambda(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$, $s(t)$, $\mu(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(t)$, $\mu'(x)$, $s'(t)$ sont définies et continues par rapport à tous ses arguments dans le domaine

$$D=\{a\leqslant\xi,x,p(x),\ g(x)\leqslant b,\ \alpha\leqslant\tau,t,\sigma(t),\quad \lambda(t)\leqslant\gamma,$$
$$0\leqslant|s_i|\leqslant l_i=\text{const},\ i=\overline{1,8}\}$$

et soient $L_{if}(x, t)$, $i = \overline{1, 4}$, $L_{iK}(x, t, \xi)$, $L_{iP}(x, t, \tau)$, $i = 1,2$, les coefficients de Lipschitz continues et non négatifs, correspondant aux arguments s_t. Après avoir réduit le système intermédiaire (1), (3) à l'équation intégrodifférentielle équivalente

$$M[u(x,t)] = \mu'(x) + s'(t) - p_2 + \int_a^x \int_\alpha^t f[\eta, \theta, u(\eta, \theta), M[u(\eta, \theta)],$$

$$\int_{p(\eta)}^{\varphi(\eta)} K(\eta, \theta, u(\xi, \theta), u'_\theta(\xi, \theta))\mathrm{d}\xi, \int_{\sigma(\theta)}^{\lambda(\theta)} P(\eta, \theta, \tau, u(\eta, \tau), u'_\eta(\eta, \tau))\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta, \tag{4}$$

la solution du problème (4), (2) en est de même la solution du système initial (1)—(3). À la suite de la substitution $M[u(x, t)] = v(x, t)$, le système (4), (2) se transforme dans un système d'équations intégrales, à savoir

$$u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t) - p_1 + \int_a^x \int_\alpha^t v(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \equiv H[v], \tag{5}$$

$$v(x,t) = \pi(x,t) + \int_a^x \int_\alpha^t f\ \eta, \theta, H[v], v(\eta, \theta),$$

$$\int_{p(\eta)}^{\varphi(\eta)} K\left(\eta, \theta, \xi, H[v], \frac{\partial}{\partial\theta} H[v]\right)\mathrm{d}\xi, \int_{\sigma(\theta)}^{\lambda(\theta)} P(\eta, \theta, \tau., H[v],$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\eta} H[v]\right)\mathrm{d}\tau\Big]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta \equiv A[v], \tag{6}$$

où l'on a mis $\pi(x, t) \equiv \mu'(x) + s'(t) - p_2$. Choisissons pour norme la définition $\| \cdot \| = \max | \cdot |$ et supposons que l'on ait $\forall x,\ t,\ v^*(x, t) \in D \to$ $\to A[v^*]$ et $H[v^*] \in D$. On en conclut par le

Théorème 1. *Dans les hypothèses ci-dessus, le problème intégrodifférentiel polyvibrant de Mangeron* (1)—(3) *possède, dans le domaine D, pour*

$$k_1 = \left\| \int_{a\alpha}^{xt} \left\{ L_{1f}(\eta, \theta)\,(\eta, - a)\,(\theta - \alpha) + L_{2f}(\eta, \theta) + L_{3f}(\eta, \theta) \right| \int_{p(\eta)}^{\varphi(\eta)} [L_{1K}(\eta, \theta, \xi). \right.$$

$$\left. (\xi - a)\,(\theta - \alpha) + L_{2k}(\eta, \theta, \xi)\,(\xi - a)]\mathrm{d}\xi \right| + L_{4f}(\eta, \theta) \left| \int_{\sigma(\theta)}^{\lambda(\theta)} [L_{1P}(\eta, \theta, \tau). \right. \tag{7}$$

$$\left. (\eta - a)\,(\tau - \alpha) + L_{2P}(\eta, \theta, \tau)\,(\tau - \alpha)]\,\mathrm{d}\tau \right| \Big\}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\eta \Big\| < 1,$$

une solution et une seule $u = u(x, t) \in C^{2,2}[a, b]\times[\alpha, \gamma]$ *que l'on peut approximer à un degré de précision voulu par les éléments de la succession* $u_i(x, t)\}_0^\infty$, *où l'on a*

$$u_i(x, t) = H[v_i], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$v_i(x, t) = A[v_{i-1}], \quad i = 1, 2, \ldots, \quad v_0(x, t) \in D, \tag{9}$$

$$| u(x, t) - u_i(x, t) | \leqslant (x - a)(t - \alpha)k_1^i \| r_0(x, t) \| : (1 - k_1), \tag{10}$$

$$r_0(x, t) \equiv v_0(x, t) - A[v_0].$$

Remarques. 1°. On aboutit, pour tout point $(a < x \leqslant b)(\alpha < t \leqslant \gamma)$, à la précision à un $\varepsilon > 0$ près, pour

$$i > \ln \{\varepsilon(1 - k_1) : [(x - a)(t - \alpha) \| r_0(x, t) \|]\} : \ln k_1. \tag{11}$$

2°. Dans le cas où les solutions de l'équation intégrale (6) sont approximées par les éléments de la succession $\{v_i(x, t)\}_0^\infty$ où l'on a $v_i(x, t) \in D$, $i = 1, 2, \ldots,$

$$v_i(x, t) = v_{i-1}(x, t)\,[1 + l_{i-1}r_{i-1}(x, t)], \tag{12}$$

$$r_{i-1}(x, t) \equiv v_{i-1}(x, t) - A[v_{i-1}],$$

l_{i-1} étant des éléments d'une succession numérique bornée, $| l_k | \leqslant l$, l'évaluation des erreurs commises s'exprime par

$$\| v_i(x, t) - v(x, t) \| = \| (1 + l_{i-1})\,[v_{i-1}(x, t) - v(x, t)] + \tag{13}$$

$$+ l_{i-1}(A[v_{i-1}] - A[v]) \| \leqslant (| 1 + l_{i-1} | l_{i-1} | k_1) \| v_{i-1}(x, t) -$$

$$- v(x, t) \| \leqslant k_2 \| v_{i-1}(x, t) - v(x, t) \|$$

et par suite, pour $k_1 | l_{i-1} | + | 1 + l_{i-1} | \leqslant k_2 < 1$, on en déduit

$$\| v_i(x, t | - v(x, t) \| \leqslant k_2^i \| v(x, t) - v_0(x, t) \| \underset{i\to 0}{\to} 0, \tag{14}$$

$$u_i(x, t) \underset{i\to\infty}{\to} u(x, t), \quad \forall (x, t) \in D.$$

3°. On peut aboutir à la construction des solutions approximatives de l'équation intégrale (6) et utilisant, entre autres, la méthode développée dans [5].

4°. Dans le cas où l'équation (1) est linéaire et les fonctions connues qui y entrent sont continues dans D_1 le problème polyvibrant correspondant aux conditions (2), (3) possède toujours une solution et une seule dans D, $u = u(x, t) \in C^{2,2}[a, b]\times[\alpha, \gamma]$.

4. L'étude de la stabilité des solutions du système (1)—(3) par rapport aux perturbations des fonctions à la frontière (2), (3), se traduit par la recherche des solutions $z(x, t)$ du système constitué par (1) où la fonction inconnue $u(x, t)$ a été substituée par $z(x, t)$ et les conditions

$$z(x, \alpha) = \varphi_1(x), \quad z(a, t) = \psi_1(t), \quad \varphi_1(a) = \psi_1(\alpha) = p_3, \tag{15}$$

(16) $$z'_t(x, \alpha) = \mu_1(x), \quad z'_x(a, t) = s_1(t), \quad \mu'_1(a) = s'_1(\alpha) = p_4.$$

On obtient d'une manière analogue à ce qu'a été fait ci-dessus, les équations

(17) $$M[z(x, t)] = \pi_1(x, t) + \int_{a}^{x}\int_{\alpha}^{t} f\Big[\eta, \theta, z(\eta, \theta), M[z(\eta, \theta)], \int_{p(\eta)}^{g(\eta)} K(\eta, \theta, \xi, z(\xi, \theta), z'_\theta(\xi, \theta))\mathrm{d}\xi, \int_{\sigma(\theta)}^{\lambda(\theta)} P(\eta, \theta, \tau, z(\eta, \tau), z'_\eta(\eta, \tau))\mathrm{d}\tau\Big]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta,$$

(18) $$z(x, t) = \varphi_1(x) + \psi_1(t) - p_3 + \int_{a}^{x}\int_{\alpha}^{t} w(\xi, \tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi \equiv H_1[w], \; w(x, t) = M[z],$$

où l'on a mis $\pi_1(x, t) \equiv \mu'_1(x) + s'_1(t) - p_4$. Soient $|\varphi(x) - \varphi_1(x)| \equiv h_1(x)$,

$$|\psi(t) - \psi_1(t)| \equiv h_2(t), \quad |\mu_{(x)}^{(i)} - \mu_1^{(i)}(x)| \equiv h_3^{(i)}(x),$$

$$|s^{(i)}(t) - s_1^{(i)}(t)| \equiv h_4^{(i)}(t), \quad i = 0,1,$$

$|M[u(a, \alpha)] - M[z(a, \alpha)] = h$, $|u(a, \alpha)| - z(a, \alpha)| = \delta$. De (17), (18) on obtient

(19) $$w(x, t) = \pi_1(x, t) + \int_{a}^{x}\int_{\alpha}^{t} f\Big[\eta, \theta, H_1[w], w(\eta, \theta), \int_{p(\eta)}^{g(\eta)} K(\eta, \theta, \xi, H_1[w], \frac{\partial}{\partial\theta} H_1[w])\mathrm{d}\xi, \int_{\sigma(\theta)}^{\lambda(\theta)} P(\eta, \theta, \tau, H_1[w], \frac{\partial}{\partial\eta} H_1[w])\mathrm{d}\tau\Big]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\eta \equiv A_1[w]$$

et on peut énoncer le suivant

Théorème 2. *Le problème perturbé* (1), (15), (16) *possède dans* D, *pour* $\forall x, t, w^* \in D \to A_1[w^*], H_1[w^*] \in D$ *et pour* $k_1 < 1$, *une solution et une seule* $z = z(x, t) \in C^{2,2}[a, b]\times[\alpha, \gamma]$, *que l'on peut approximer par les éléments de la succession* $\{z_i(x, t)\}_0^\infty$, *où l'on a*

(20) $$z_i(x, t) = H_1[w_i], \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

(21) $$w_i(x, t) = A_1[w_{i-1}], \quad i = 1, 2, \ldots, \quad w_0(x, t) \in D,$$

tandis que l'évaluation des erreurs commises s'exprime par les inégalités

(22) $$|z(x, t) - z_i(x, t)| \leqslant (x - a)(t - \alpha)\, k_1^i \,\|R_0(x, t)\| : (1 - k_1) \equiv E_i(x, t), \quad \forall (x, t) \in D,$$

$$R_0(x, t) \equiv w_0(x, t) - A_1[w_0],$$

$$(23) \qquad |u(x,t) - z(x,t)| \leqslant h_1(x) + h_2(t) + |p_1 - p_3| + + (x-a)(t-\alpha)\, p : (1-k_1) \equiv G(x,t,\rho),$$

$$(24) \qquad |u(x,t) - z_i(x,t)| \leqslant |u(x,t) - z(x,t)| + |z(x,t) - z_i(x,t)| \leqslant \leqslant E_i(x,t) + G(x,t,\rho),$$

le nombre ρ *étant supposé connu à la suite de l'évaluation préalable du module de la différence* $v(x,t) - w(x,t)$.

Reçue le 30 décembre 1975

Institut de Mécanique et d'Électrotechnique, Sofia, Bulgarie,
Université et Institut Polytechnique de Besançon France,
Université d'État de la R. S. S. de Kirgizie, URSS et Université de Pérugia, Italie

BIBLIOGRAPHIE

1. Mangeron D., *Problèmes concernant les équations polyvibrantes.* C. r. Acad. Sci., Paris, **266** A, 870—873, 976—979, 1 050—1 052, 1 103—1 106, 1 121—1 124 (1968).
2. Krivoshein L. E., Kutanov A., Leung K. V., Oguztoreli M. N., Salandi D., *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. Problèmes à la frontière pour certaines classes d'équations intégro-différentielles non linéaires de Mangeron.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XX** (XXIV), *1—2*, s. I, 111—115 (1974).
3. Dzhunuzbekova S., Krivoshein L. E., Leung K. V., Oguztoreli M. N., *Problèmes concernant différentes classes d'équations intégro-différentielles non linéaires de Mangeron* (I). Acad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., (8), **56** (1974).
4. Krivoshein L. E., Oguztoreli M. N., *Sul problema di Goursat per un'equazione integro-differenziale di Mangeron.* Istituto Lombardo, Accad. Sci. Lett., Rend. Classe di Sci. (*A*), **108**, 42—49 (1974).
5. Krivoshein L. E., Kutanov A., Leung K. V., Oguztoreli M. N., *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. Problèmes à la frontière aux conditions initiales fonctionnelles pour une classe d'équations intégrodifférentielles de Mangeron aux intégrales d'Urysohn.* Bull. Soc. Math. Belg., **27**, 57—65 (1975).
6. Birkhoff G., Gordon W., *On the Draftsman and Related Equations.* J. Approx. Theory, **1**, 199—208 (1968).
7. Birkhoff G., In *Approximation with Special Emphasis on Spline Functions.* Ed. I.J. Schoenberg, Academic Press, N. Y., pp. 209—210 (1969).
8. Oguztoreli M. N., *Electrostatic Oscillations in Cold Homogeneous Plasmas with Compact Support.* J. Plasma Physics (sous presse).

STUDIUL DIFERITELOR CLASE DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE ALE LUI MANGERON (II)

(Rezumat)

Autorii, continuînd seria de lucrări privind diferite clase de ecuaţii polivibrante ale lui Mangeron [1]—[5], ce şi-au găsit aplicaţii, de ex., în proiectarea automată a suprafeţelor de formă oarecare [6]—[7] sau în unele procese din plasmă [8], studiază în această Notă, sprijinindu-se în parte pe o extensiune a metodei elaborată în [3], problema de determinare a soluţiilor sistemului integro-diferenţial neliniar polivibrant al lui Mangeron (1)—(3), determinînd totodată soluţii aproximative şi evoluînd erorile comise. Problema stabilităţii soluţiilor în raport cu unele perturbaţii ale coeficienţilor sistemului considerat este şi ea abordată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 513.8

CVASI-CONEXIUNI COMPLET REDUCTIBILE PE SPAȚII CU STRUCTURA APROAPE PRODUS

DE

ELENA VAMANU

Fie V_n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞, cu n dimensiuni, dotată cu o structură aproape produs determinată de cîmpul de tensori F_j^i. Existența cîmpului de tensori de tip (1, 1), F_j^i, nedegenerat, care dă structura aproape produs a varietății V_n, ne permite să definim global pe V_n o cvasi-conexiune Γ [4]. Dacă derivata covariantă a tensorului F_j^i în raport cu cvasiconexiunea Γ este nulă, cvasi-conexiunea Γ se numește complet reductibilă [3].

În [3] au fost determinate toate cvasi-conexiunile complet reductibile în cazul, mai general, al unei r-Π - structuri. Pentru $r = 2$ obținem structurile aproape produs și cvasi-conexiunile complet reductibile pe spații dotate cu astfel de structuri [1]).

În Nota de față ne propunem să studiem cîteva proprietăți ale cvasi-conexiunilor complet reductibile pe o varietate cu structură aproape produs.

Fie Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, operatorii Obata definiți prin

$$\begin{aligned} &\Phi_1 P_{ji}^h = \frac{1}{2}(P_{ji}^h + F_i^m P_{jm}^k F_k^h), \quad \Phi_2 P_{ji}^h = \frac{1}{2}(P_{ij}^h - F_i^m P_{jm}^k F_k^h), \\ &\Phi_3 P_{ji}^h = \frac{1}{2}(P_{ji}^h + F_j^k F_i^m P_{km}^h), \quad \Phi_4 P_{ji}^h = \frac{1}{2}(P_{ji}^h - F_j^k F_i^m P_{km}^h), \end{aligned} \tag{1}$$

P_{ji}^h fiind un tensor arbitrar de tip (1, 2) [1].

Din definiție rezultă că acești operatori sînt liniari și satisfac proprietățile:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 + \Phi_2 = I, \quad \Phi_1\Phi_1 = \Phi_1, \quad \Phi_1\Phi_2 = \Phi_2\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2\Phi_2 = \Phi_2, \\ &\Phi_3 + \Phi_4 = I, \quad \Phi_3\Phi_3 = \Phi_3, \quad \Phi_3\Phi_4 = \Phi_4\Phi_3 = 0, \quad \Phi_4\Phi_4 = \Phi_4, \\ &\Phi_1\Phi_3 = \Phi_3\Phi_1, \quad \Phi_1\Phi_4 = \Phi_4\Phi_1, \quad \Phi_2\Phi_3 = \Phi_3\Phi_2, \quad \Phi_2\Phi_4 = \Phi_4\Phi_2, \end{aligned} \tag{2}$$

I fiind operatorul unitate.

---

[1]) Pentru detalii în legătură cu teoria cvasi-conexiunilor vezi [3], [4], [5].

Teorema 1. *Fie* Γ *o cvasi-conexiune complet reductibilă și* A *un cîmp de tensori de tip* (1, 2). *O condiție necesară și suficientă ca cvasi-conexiunea* $\overset{1}{\Gamma} = \Gamma + A$ *să fie complet reductibilă este ca* $\Phi_2 A = 0$.

Demonstrație. Dacă $\overset{1}{D}$ este derivata covariantă în raport cu cvasi-conexiunea $\overset{1}{\Gamma}$, atunci, ținînd cont de ipoteză rezultă :

$$F_h^m \overset{1}{D}_j F_i^h = -2\Phi_2 A_{ji}^m. \tag{3}$$

Cum F este nedegenerat, $\overset{1}{D}F = 0$ dacă și numai dacă $\Phi_2 A = 0$. c. c. t. d.

Fie Γ o cvasi-conexiune oarecare și D simbolul diferențierii covariante în raport cu Γ. Introducem operatorul Φ definit prin

$$\Phi\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h + \frac{1}{2}(D_j F_i^m)F_m^h. \tag{4}$$

Cum $\frac{1}{2}(D_j F_i^m)F_m^h$ este un tensor, rezultă că $\Phi\Gamma$ este tot o cvasi-conexiune.

Se mai verifică, plecînd de la definiție că

$$\Phi\Phi = \Phi. \tag{5}$$

Dacă Γ este complet reductibilă, adică $DF = 0$, atunci $\Phi\Gamma = \Gamma$ și reciproc. Putem deci enunța

Teorema 2. *O condiție necesară și suficientă ca o cvasi-conexiune* Γ *să fie complet reductibilă este ca*

$$\Phi\Gamma = \Gamma. \tag{6}$$

Teorema 3. *Fie* $\mathring{\Gamma}$ *o cvasi-conexiune oarecare. Atunci cvasi-conexiunea* $\Gamma = \Phi\mathring{\Gamma}$ *este o cvasi-conexiune complet reductibilă.*

În adevăr, după (5) avem

$$\Phi\Gamma = \Phi\Phi\mathring{\Gamma} = \Phi\mathring{\Gamma} = \Gamma.$$

După teorema 2 rezultă Γ complet reductibilă. c. c. t. d.

Folosind expresia tensorului de torsiune al unei cvasi-conexiuni dată în [4], obținem că tensorul de torsiune T al cvasi-conexiunii $\Gamma = \Phi\mathring{\Gamma}$ este

$$T_{ij}^k = \mathring{T}_{ij}^k + \frac{1}{2}F_{[i}^h \mathring{D}_{j]}F_h^k, \tag{7}$$

T_{ij}^k fiind tensorul de torsiune al cvasi-conexiunii $\mathring{\Gamma}$, iar $\mathring{D}$ simbolul derivării covariante în raport cu $\mathring{\Gamma}$.

Fie N^h_{ji} tensorul lui Nijenhuis asociat structurii aproape produs dată de tensorul F^i_j, deci [2]

$$N^h_{ji} = \frac{1}{2} F^m_j (F^h_{i,m} - F^h_{m,i}) - F^m_i (F^h_{j,m} - F^h_{m,j}). \tag{8}$$

Teorema 4. *Fie* $\mathring{\Gamma}$ *o cvasi-conexiune simetrică. Atunci, tensorul de torsiune* T *al cvasi-conexiunii complet reductibile* $\Gamma = \Phi\mathring{\Gamma}$ *satisface relația*

$$N^h_{ij} = -2F^h_k \Phi_3 T^k_{ij}\,. \tag{9}$$

Demonstrație. Din (7) și din ipoteza că $\mathring{\Gamma}$ este simetrică se obține:

$$T^h_{ij} = \frac{1}{2} F^k_{[j} \mathring{D}_{i]} F^h_k + (\mathring{\Gamma}^m_{ik} F^k_j - \mathring{\Gamma}^m_{jk} F^k_i) F^h_m. \tag{10}$$

Pe de altă parte, exprimînd pe N^h_{ij} cu ajutorul derivatei covariante în raport cu $\mathring{\Gamma}$, în ipoteza $\mathring{\Gamma}$ simetrică, avem

$$N^h_{ij} = \frac{1}{2} \mathring{D}_{[i} F^h_{j]} + \frac{1}{2} F^k_i F^m_j \mathring{D}_{[k} F^h_{m]} \tag{11}$$

Din (1), (10) și (11) rezultă $N^h_{ij} = -2F^h_m \Phi_3 T^m_{ij}$, c. c. t. d.

Teorema 5. *Fie* Γ *o cvasi-conexiune complet reductibilă de tensor de torsiune* T. *Atunci* $\overset{1}{\Gamma} = \Gamma - \Phi_1\Phi_4 T$ *este tot o cvasi-conexiune complet reductibilă de tensor de torsiune* $\overset{1}{T} = \Phi_3 T$.

Demonstrație. Notăm

$$A^h_{ji} = -\Phi_1\Phi_4 T^h_{ji}.$$

Ținînd cont de definițiile lui Φ_1 și Φ_4 obținem:

$$A^h_{ji} = \frac{1}{4}(-T^h_{ji} + F^m_j F^k_i T^h_{mk} - F^k_i T^m_{jk} F^h_m + F^m_j T^k_{mi} F^h_k).$$

Un calcul simplu ne dă

$$\Phi_2 A^h_{ji} = 0.$$

Cum $\overset{1}{\Gamma} = \Gamma + A$ și $\Phi_2 A = 0$, conform teoremei 1 rezultă $\overset{1}{\Gamma}$ cvasi-conexiune complet reductibilă.

Calculînd tensorul de torsiune al cvasi-conexiunii $\overset{1}{\Gamma}$ obținem:

$$\overset{1}{T}{}^k_{ji} = \frac{1}{2}(T^k_{ji} + F^m_j F^h_i T^k_{mh}) = \Phi_3 T^k_{ji}\,, \tag{12}$$

c. c. t. d.

Din teoremele 4 și 5 rezultă

Teorema 6. *Pe o varietate cu structură aproape produs există o cvasi-conexiune complet reductibilă* $\mathring{\Gamma}$, *cu tensor de torsiune* $\mathring{T}$ *satisfăcînd condiția*

$$N^h_{ji} = -2F^h_m \mathring{T}^m_{ji}, \tag{13}$$

sau

$$\mathring{T}^h_{ji} = -\frac{1}{2} F^h_m N^m_{ji}. \tag{13'}$$

Din (13) rezultă că anularea lui N atrage anularea lui T și reciproc. Obținem astfel

Teorema 7. *O condiție necesară și suficientă ca o structură aproape produs să fie integrabilă este ca pe varietate să existe o cvasi-conexiune complet reductibilă fără torsiune.*

Presupunem acum că pe V_n sînt date două structuri aproape produs determinate, respectiv, de tensorii F^i_j și G^i_j. Dacă acești doi tensori satisfac condiția

$$F^k_i G^j_k = G^k_i F^j_k, \tag{14}$$

se spune că pe V_n avem o structură cuaternioniană de tip I [2]. Punînd

$$H^j_i = F^k_i G^j_k, \tag{15}$$

în baza relației (14) se verifică imediat că și tensorul H^j_i determină o structură aproape produs pe V_n. Mai mult, între cei trei tensori avem relațiile:

$$\begin{aligned} F^k_i G^h_k &= G^k_i F^h_k = H^h_i, \\ G^k_i H^h_k &= H^k_i G^h_k = F^h_i, \\ H^k_i F^h_k &= F^k_i H^h_k = G^h_i. \end{aligned} \tag{16}$$

Fie V_n o varietate diferențiabilă dotată cu o structură cuaternioniană de tip I determinată de perechea (F, G). O cvasi-conexiune Γ în raport cu care derivatele covariante ale tensorilor F și G sînt nule o vom numi (F, G)-cvasi-conexiune complet reductibilă.

Observație. Din $DF = DG = 0$ rezultă și $DH = 0$.

Dacă Γ este o cvasi-conexiune oarecare pe V_n introducem operatorii Φ, Ψ și Θ de tipul celui dat prin (4)

$$\begin{aligned} \Phi\Gamma^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}(\mathrm{D}_j F^m_i) F^h_m, \\ \Psi\Gamma^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}(\mathrm{D}_j G^m_i) G^h_m, \\ \Theta\Gamma^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}(\mathrm{D}_j H^m_i) H^h_m, \end{aligned} \tag{17}$$

Se demonstrează ușor că acești operatori se bucură de proprietățile:

$$\Phi\Phi = \Phi, \quad \Psi\Psi = \Psi, \quad \Theta\Theta = \Theta,$$
$$\Phi\Psi = \Psi\Phi = \Phi\Theta = \Theta\Phi = \Psi\Theta = \Theta\Psi, \quad \Psi(\Phi\Psi) = \Phi\Psi. \tag{18}$$

Teorema 8. *Fie* $\overset{\bullet}{\Gamma}$ *o cvasi-conexiune oarecare pe* V_n; *cvasi-conexiunea* $\Gamma = \Phi\Psi\overset{\circ}{\Gamma}$ *este o* (F, G)*-cvasi-conexiune complet reductibilă.*

Demonstrație. Fie cvasi-conexiunea oarecare $\overset{\circ}{\Gamma}$ atunci $\overset{1}{\Gamma} = \Psi\overset{\circ}{\Gamma}$ este o cvasi-conexiune complet reductibilă, adică $\overset{1}{D}G = 0$ (conform teoremei 3).

Considerăm acum cvasi-conexiunea $\Gamma = \Phi\overset{1}{\Gamma} = \Phi\Psi\overset{\bullet}{\Gamma}$. Conform teoremei 3, Γ este complet reductibilă și deci $DF = 0$, D fiind simbolul derivatei covariante în raport cu Γ. Pentru a arăta că Γ este o (F, G)- cvasi-conexiune complet reductibilă trebuie să mai arătăm că $\Psi\Gamma = \Gamma$. Avem

$$\Psi\Gamma = \Psi\Phi\overset{1}{\Gamma} = \Psi(\Phi\Psi)\overset{\circ}{\Gamma} = \Phi\Psi\overset{\circ}{\Gamma} = \Gamma,$$

c. c. t. d.

Am arătat astfel că $\Gamma = \Phi\Psi\overset{\circ}{\Gamma}$ este o (F, G)- cvasi-conexiune complet reductibilă.

Din (17) și (18) obținem:

$$\Gamma^h_{ji} = \Phi\Psi\overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{4}(\overset{\circ}{D}_j F^m_i)F^h_m + (\overset{\circ}{D}_j G^m_i)G^h_m + (\overset{\circ}{D}_j H^m_i)H^h_m, \tag{19}$$

componentele cvasi-conexiunii căutate, exprimate cu ajutorul unei cvasi-conexiuni $\overset{\circ}{\Gamma}$, date, și a tensorilor F, G, H.

Tensorul de torsiune al cvasi-conexiunii (19) este dat de

$$T^h_{ji} = \overset{\circ}{T}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}[\overset{\circ}{D}_{[j}F^m_{i]}F^h_m + \overset{\circ}{D}_{[j}G^m_{i]}G^h_m + \overset{\circ}{D}_{[j}H^m_{i]}H^h_m], \tag{20}$$

$\overset{\circ}{T}{}^h_{ji}$ fiind tensorul de torsiune al cvasi-conexiunii $\overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji}$.

Primită la 2 iunie 1975

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Obata M., *Affine Connections on Manifolds with Almost Complex, Quaternion on Hermitian Structure.* Japanese J. of Math., Tokyo, **26**, 43–77 (1956).
2. Saeki T., *Affine Connections on Differentiable Manifolds with π-structure.* The annual Report of the Faculty of Education, University of Iwate, **29**, P. 3, 1–8 (1969).
3. Vamanu E., *Cvasi-conexiuni pe spații dotate cu o r-π-structură.* An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, s. I., XVI, *1*, 117–125 (1970).

4. V a m a n u E., *Cvasi-conexiuni pe varietăți diferențiabile.* An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, *s.* I., XVI, 2, 383—388 (1970).
5. V a m a n u E., *Quasi-connexions sur variétés différentiables* (II). An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza, Iași, *s.* I., XVIII, *1*, 163—166 (1972).

QUASI-CONNEXIONS COMPLÈTEMENT RÉDUCTIBLES SUR DES ESPACES À STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT

(Résumé)

Dans la première partie du travail, on étudie quelques propriétés des quasi-connexions complètement réductibles sur un espace à structure presque-produit. Ces propriétés permettent la détermination d'une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de la structure. Dans la partie finale, on détermine une quasi-connexion complètement réductible sur un espace à structure quaternione.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

C. Z. 513.3

O TEOREMĂ DE OFERTĂ-CERERE SIMETRICĂ PENTRU FLUXUL DE DOUĂ PRODUSE

DE

VIOREL GHIUȘ

Fie o rețea $[N, A]$ cu mulțimea de noduri N și mulțimea de arce A. Pe mulțimea arcelor A este definită o funcție de capacitate $c(x, y)$, $(x, y) \in A$, care ia valori întregi, nenegative, pare. Presupunem că mulțimea nodurilor N este partiționată în submulțimele de noduri sursă $S_i (i = 1, 2)$, submulțimea de noduri intermediare R și submulțimele de noduri ale consumatorilor T_i $(i = 1, 2)$. Asociem la fiecare nod $x \in S_i (i = 1, 2)$ o pereche de numere întregi, nenegative, pare $a_i(x)$ și $a_i'(x)$ cu $a_i(x) \leqslant a_i'(x)$, iar la fiecare nod $x \in T_i$ $(i = 1, 2)$ o pereche de numere întregi, nenegative, pare $b_i(x)$ și $b_i'(x)$ cu $b_i'(x) \geqslant b_i(x)$.

Ne punem problema admisibilității unui flux de două produse $F_i(x, y)$, care să satisfacă la condițiile:

$$(1) \qquad a_i(x) \leqslant F_i(x, N) - F_i(N, x) \leqslant a_i'(x), \qquad x \in S_i, \qquad i = 1, 2;$$

$$(2) \qquad F_i(x, N) - F_i(N, x) = 0, \qquad x \in R;$$

$$(3) \qquad b_i(x) \leqslant F_i(N, x) - F_i(x, N) \leqslant b_i'(x), \qquad x \in T_i, \qquad i = 1, 2;$$

$$(4) \qquad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{2} F_i(x, y) \leqslant c(x, y), \qquad (x, y) \in A.$$

Extindem rețeaua $[N', A]$ la rețeaua $[N', A']$ adăugînd nodurile s, t, u_i, v_i $(i = 1, 2)$ și arcele (s, S_i), (T_i, t), (u_i, S_i), (T_i, v_i), (u_i, t), (s, v_i) pentru $i = 1, 2$ și arcul (t, s).

Definim o funcție de capacitate pe A' astfel:

$$c'(s, x) = a_i'(x) - a_i(x), \quad x \in S_i, i = 1, 2; \quad c'(u_i, t) = b_i(T_i), \quad i = 1, 2;$$

$$c'(u_i, x) = a_i(x), \quad x \in S_i, i = 1, 2; \quad c'(s, v_i) = a_i(S_i), \quad i = 1, 2;$$

$$c'(x, t) = b_i'(x) - b_i(x), \quad x \in T_i, i = 1, 2; \quad c'(t, s) = \infty;$$

$$c'(x, v_i) = b_i(x), \quad x \in T_i, i = 1, 2; \quad c'(x, y) = c(x, y), \quad (x, y) \in A.$$

Lemă. *Există un flux de două produse* F_i $(i=1, 2)$ *în* $[N, A]$ *satisfăcînd condițiile* (1)—(4) *dacă și numai dacă există un flux de două produse maximal* $F'_i (i = 1, 2)$ *de la* u_i *la* v_i $(i = 1, 2)$ *în* $[N', A']$ *de valoare* $F'_i(u_i, v_i) = a_i(S_i) + b_i(T_i)$, $(i = 1, 2)$.

Necesitatea. Definim F'_i pe A' astfel:

$$F'_i(s, x)=F_i(x, N)-F_i(N, x)-a_i(x) \quad \text{și} \quad F'_i(u_i, x)=a_i(x), \quad x \in S_i, \quad i=1, 2;$$

$$F'_i(x, t)=F_i(N, x)-F_i(x, N)-b_i(x) \quad \text{și} \quad F'_i(x, v_i)=b_i(x), \quad x \in T_i, \quad i=1, 2;$$

$$F'_i(u_i, t) = b_i(T_i), \quad i = 1, 2; \qquad F'_i(s, v_i)=a_i(S_i), \quad i = 1, 2;$$

$$F'_i(t, s)=F_i(S_i, N)-F_i(N, S_i), \quad i=1, 2; \quad F'_i(x, y)=F_i(x, y), \quad (x, y) \in A.$$

Se verifică că: $0 \leqslant \sum_{i=1}^{2} F'_i(\alpha, \beta) \leqslant c'(\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta) \in A';$

$F'_i(\alpha, N') - F'_i(N' \alpha) = 0$ pentru orice α diferit de u_i și de v_i;

$$F'_i(u_i, N') = F'_i(N', v_i) = a_i(S_i) + b_i(T_i) = c'(u_i; v_i), \quad i = 1, 2;$$

$$\sum_{i=1}^{2} F'_i(u_i, N') = \sum_{i=1}^{2} F'_i(N', v_i) = \sum_{i=1}^{2} [a_i(S_i)+b_i(T_i)] = c'(u_1, u_2; v_1, v_2),$$

adică sînt satisfăcute condițiile teoremelor 1 și 2 [3].

Suficiența. Fie un flux maxim de două produse F'_i de la u_i la $v_i (i = 1, 2)$ în $[N', A']$ de valoare $a_i(S_i) + b_i(T_i)$, $(i = 1, 2)$ care satisface teoremelor 1 și 2 [3].

Evident el va satura arcele (u_i, S_i), (u_i, t), (T_i, v_i) și (s, v_i) pentru $i = 1, 2$. Atunci

$$F'_i(u_i, x) = a_i(x), \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2;$$

$$F'_i(x, v_i) = b_i(x), \quad x \in T_i, \quad i = 1, 2.$$

Fie F_i restricția lui F'_i la A. Să arătăm că F_i, $(i = 1, 2)$ este un flux admisibil de două produse în $[N, A]$ care satisface condițiile (1)—(4).

Condițiile (2) și (4) sînt automat satisfăcute.

$$F'_i(u_i, x) + F'_i(s, x) = F'_i(x, N) - F'_i(N, x), \quad x \in S_i, \ (i = 1, 2);$$

sau

$$a_i(x) + F'_i(s, x) = F_i(x, N) - F_i(N, x), \quad x \in S_i, \ (i = 1, 2).$$

Deoarece

$$0 \leqslant F'_i(s, x) \leqslant c'(s, x) = a'_i(x) - a'_i(x), \quad x \in S_i, \ (i = 1, 2)$$

rezultă condiția (1). Similar rezultă (3).

Pe baza acestei leme, ne propunem să găsim în ce condiții există un flux maxim de două produse F'_i, $(i = 1, 2)$ de la u_i la v_i în $[N', A']$ avînd valoarea $a_i(S_i) + b_i(T_i)$, $(i = 1, 2)$ care saturează toate arcele (u_i, N') și (N', v_i), $(i = 1, 2)$.

Teoremă. *Condițiile* (1)—(4) *sînt admisibile dacă și numai dacă*:

$$b_i(T_i \cap \bar{X}) - a_i'(S_i \cap \bar{X}) \leqslant c(X\,;\,\bar{X}), \qquad i = 1,\ 2\,; \tag{5}$$

$$a_i(S_i \cap X) - b_i'(T_i \cap X) \leqslant c(X\,;\,\bar{X}), \qquad i = 1,\ 2\,; \tag{5'}$$

$$\sum_{i=1}^{2} [b_i(T_i \cap \bar{X}) - a_i'(S_i \cap \bar{X})] \leqslant c(X\,;\,\bar{X}), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{2} [a_i(S_i \cap X) - b_i'(S_i \cap X)] \leqslant c(X\,,\,\bar{X}),\ \textit{pentru orice}\ X \subset N. \tag{6'}$$

Vom cerceta, cînd capacitatea oricărei tăieturi ce separă u_i de v_i cu i fix, este cel puțin $a_i(S_i) + b_i(T_i)$ și, cînd capacitatea oricărei tăieturi ce separă $\{u_1,\ u_2\}$ de $\{v_1,\ v_2\}$ este cel puțin $\sum_{i=1}^{2} [a_i(S_i) + b_i(T_i)]$ în $[N',\ A']$.

Fie i fix și $(X',\ \bar{X}')$ o tăietură oarecare ce separă u_i de v_i în $[N',\ A']$. Să vedem cînd $c'(X',\ \bar{X}') \geqslant a_i(S_i) + b_i(T_i)$.

Deosebim cazurile:

1) $s \in X'$ și $t \in \bar{X}'$.

$$c'(X',\ \bar{X}') = c'(u_i + s + X,\ v_i + t + \bar{X}) = c'(u_i,\ t) + c'(u_i\,,\ \bar{X}) +$$

$$+ c'(s,\ v_i) + c'(s,\ \bar{X}) + c'(X,\ v_i) + c'(X,\ t) + c'(X,\ \bar{X}) = b_i(T_i) +$$

$$+ a_i(S_i \cap \bar{X}) + a_i(S_i) + [a_i'(S_i \cap \bar{X}) - a_i(S_i \cap \bar{X})] + b_i(T_i \cap X) +$$

$$+ [b_i'(T_i \cap X) - b_i(T_i \cap X)] + c(X.\ \bar{X}).$$

În acest caz condiția cerută este satisfăcută.

2) $s \in \bar{X}'$ și $t \in X'$.

În acest caz condiția cerută este banal satisfăcută deoarece $(t,\ s)$ aparține tăieturii $(X',\ \bar{X}')$.

3) $s \in X'$ și $t \in X'$.

$$c'(X',\ \bar{X}') = c'(u_i + s + t + X,\ \ v_i + \bar{X}) = c'(u_i\,,\ \bar{X}) + c'(s,\ v_i) +$$

$$+ c'(s,\ \bar{X}) + c'(X,\ v_i) + c'(X,\ \bar{X}) = a_i(S \cap \bar{X}) + a_i(S_i) +$$

$$+ [a_i'(S_i \cap \bar{X}) - a_i(S_i \cap \bar{X})] + b_i(T_i \cap X) + c(X,\ \bar{X}).$$

În acest caz condiția cerută este satisfăcută dacă este îndeplinită (5).

4) $s \in \bar{X}'$ și $t \in \bar{X}'$.

$$c'(X',\ \bar{X}') = c'(u_i + X,\ v_i + s + t + \bar{X}) = c'(u_i,\ t) + c'(u_i,\ \bar{X}) +$$

$$+ c'(X,\ v_i) + c'(X,\ t) + c'(X,\ \bar{X}) = b_i(T_i) + a_i(S_i \cap \bar{X}) +$$

$$+ b_i(T_i \cap X) + [b_i'(T_i \cap X) - b_i(T_i \cap X)] + c(X,\ \bar{X}).$$

În acest caz condiția cerută este satisfăcută dacă este îndeplinită (5').

Se știe [4] că $c'(u_1, u_2; v_1, v_2) = \min [c'(u_1 - u_2; v_1 - v_2), c'(u_1 - v_2; u_2 - v_1)]$, unde $c'(u_1 - u_2; v_1, v_2)$ este capacitatea tăieturii minime ce separă $\{u_1, u_2\}$ de $\{v_1, v_2\}$ în $[N', A']$, $c'(u_1 - u_2; v_1 - v_2)$ este capacitatea tăieturii minime obținută din $[N', A']$ cînd se condensează nodurile u_1 cu u_2 în nodul u respectiv v_1 cu v_2 în nodul v și $c'(u_1 - v_2; u_2 - v_1)$ este capacitatea tăieturii minime obținută din $[N', A']$ cînd se condensează nodurile u_1 cu v_2 în nodul $\bar{u}$ respectiv u_2 cu v_1 în nodul $\bar{v}$.

Pentru a cerceta $c'(u_1 - u_2; v_1 - v_2)$ analizăm cazurile :

1') $c'(u + s + X, v + t + \bar{X}) = c'(u, t) + c'(u, \bar{X}) + c'(s, v) +$

$$+ c'(s, \bar{X}) + c'(X, v) + c'(X, t) + c'(X, \bar{X}) = \sum_{i=1}^{2} b_i(T_i) + \sum_{i=1}^{2} a_i(S \cap \bar{X}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} a_i(S_i) + \sum_{i=1}^{2} [a'_i(S_i \cap \bar{X}) - a_i(S_i \cap \bar{X})] + \sum_{i=1}^{2} b_i(T_i \cap X) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} [b'_i(T_i \cap X) - b_i(T_i \cap X)] + c(X, \bar{X}).$$

În acest caz condiția cerută este satisfăcută.

2') Deoarece $(t, s) \in (X', \bar{X'})$ condiția cerută este banal satisfăcută.

3') $c'(u + s + t + X, v + \bar{X}) = c'(u, \bar{X}) + c'(s, v) + c'(s, \bar{X}) + c'(X, v) + c'(X, \bar{X}) = \sum_{i=1}^{2} a_i(S_i \cap \bar{X}) + \sum_{i=1}^{2} a_i(S_i) + \sum_{i=1}^{2} [a'_i(S_i \cap \bar{X}) - a_i(S_i \cap \bar{X})] +$

$$+ \sum_{i=1}^{2} b_i(T_i \cap X) + c(X, \bar{X}).$$

În acest caz condiția cerută este satisfăcută dacă este îndeplinită (6).

4') $c'(u + X, v + s + t + \bar{X}) = c'(u, t) + c'(u, \bar{X}) + c'(X, v) + c'(X, t) +$

$$+ c'(X, \bar{X}) = \sum_{i=1}^{2} b_i(T_i) + \sum_{i=1}^{2} a_i(S_i \cap \bar{X}) + \sum_{i=1}^{2} b_i(T_i \cap X) + \sum_{i=1}^{2} [b'_i(T_i \cap X) -$$

$$- b_i(T_i \cap X)] + c(X, \bar{X}).$$

În acest caz condiția cerută este satisfăcută dacă este îndeplinită (6').

Pentru a cerceta $c'(u_1 - v_2; u_2 - v_1)$, constatăm că în rețeaua mixtă $[N', A']$, există un flux maxim de la $\bar{u}$ la $\bar{v}$ de valoare maximă $a_1(S_1) + b_1(T_1)$ și un flux maxim de la $\bar{v}$ la $\bar{u}$ de valoare $a_2(S_2) + b_2(T_2)$, simultane, dacă acest bi-flux maximal [5] respectă condițiile teoremelor (1) și (2) din [5] :

a) rețea conexă Euler ;

b) tăietura minimă a fluxului de la $\bar{u}$ la $\bar{v}$ este $a_1(S_1) + b_1(T_1)$;

c) tăietura minimă a fluxului de la $\bar{v}$ la $\bar{u}$ este $a_2(S_2) + b_2(T_2)$;

d) tăietura minimă a fluxului bi-fluxului maximal $\bar{u} \Leftrightarrow \bar{v}$ (existența simultană a celor două fluxuri maximale) este $\sum_{i=1}^{2} [a_i(S_i) + b_i(T_i)]$.

În adevăr :

a) este implicată de faptul că $c(x, y)$, $a_i(x)$, $a'_i(x)$, $b_i(x)$, $b'_i(x)$ sînt întregi ne-negativi pari ;

b) este implicată de (5) și (5′) pentru $i = 1$;

c) este implicată de (5) și (5′) pentru $i = 2$;

d) este implicată de (6) și (6′).

Observația 1. Dacă $a_i(x) = 0$, $x \in S_i$ $(i = 1, 2)$ și $b'_i(x) = \infty$, $x \in T_i$ $(i = 1, 2)$, teorema cu condițiile (1)—(4) și (5), (5′), (6), (6′) de mai sus se reduce la teorema cu condițiile (1)—(4) și (5), (6) din [2].

Observația 2. Dacă în rețeaua $[N, A]$ facem ca S_i, $(i = 1, 2)$ să fie consumatori, T_i, $(i = 1, 2)$ să fie surse, concepem $a_i (i = 1, 2)$ ca funcții cerere și $b'_i (i = 1, 2)$ ca funcții ofertă, atunci (5′) și (6′) sînt condiții necesare și suficiente pentru admisibilitate în rețeaua inversă. Astfel rezultă :

Corolar. *Condițiile* (1) — (4) *sînt admisibile dacă și numai dacă, fiecare în parte din condițiile* :

$$\begin{cases} a_i(x) \leqslant F_i(x, N) - F_i(N, x), & x \in S_i, \quad i = 1, 2 ; \\ F_i(x, N) - F_i(N, x) = 0, & x \in R ; \\ F_i(N, x) - F_i(x, N) \leqslant b'_i(x), & x \in T_i, \quad i = 1, 2 ; \\ 0 \leqslant \sum_{i=1}^{2} F_i(x, y) \leqslant c(x, y), & (x, y) \in A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_i(x, N) - F_i(N, x) \leqslant a'_i(x), & x \in S_i, \quad i = 1, 2 ; \\ F_i(x, N) - F_i(N, x) = 0, & x \in R ; \\ b_i(x) \leqslant F_i(N, x) - F_i(x, N), & x \in T_i, \quad i = 1, 2 ; \\ 0 \leqslant \sum_{i=1}^{2} F_i(x, y) \leqslant c(x, y) & (x, y) \in A, \end{cases}$$

sînt admisibile.

Primită la 6 noiembrie 1975

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Ford L. R., Fulkerson D. R., *Flows in Networks.* Princeton University, 1962.
2. Ghiuș V., *O teoremă de ofertă-cerere pentru fluxul de două produse.* Bul. Inst. polit. Iași, XXI (XXV), *1—2*, s. I (1975).
3. Hu T. C., *Multi-commodity Network Flows.* Operations Research, 11, *3* (1963).
4. Ore O., *Theory of Graph.* Providence, Rhode Island, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXVIII, 1962.
5. Rothschild B., Whinston A., *Maximal two-way Flows.* (In print).

UN THÉORÈME SYMMÉTRIQUE D'APPROVISIONNEMENT ET DE DEMANDE POUR LE FLOT DE DEUX PRODUITS

(Résumé)

On présente un théorème symmétrique d'approvisionnement et de demande pour le flot de deux produits dans l'hypothèse que les fonctions de capacité, de l'approvisionnemet et de la demande prennent des valeurs entiers non négatifs et pairs. Ainsi s'obtient un théorème similaire au théorème symmétrique d'approvisionnement et de demande pour le flot simple [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 517.43

SPACE DERIVATIVES (II)[1]

BY

ZORAN VRCELJ

1. Introduction

In [1] we proved that differentiability is the essential condition for the existence of all space derivatives. The method given in [1] is applicable both to scalar and vector fields. We shall apply now the general results to these kind of fields.

2. Scalar Field

Theorem 1. *If a scalar field* φ *is*
1) *continuous in a vicinity of a point* P *and*
2) *differentiable at* P,
then there exist the polar derivative $\nabla\varphi(P)$ *and, for a given direction determined by the unit vector* $\mathbf{s}$, *the axial derivative* $\nabla_s\varphi(P)$. *These two space derivatives are expressed in terms of directional derivatives at* P *in three mutually orthogonal directions by Eqs.* (13) *and* (14), *respectively.*

Proof. Primarily, we are concerned with the polar derivative at P.

At every point of a spherical surface with centre at P the unit outer normal vector $\mathbf{n}$ determines a radial direction at P.

Consider the spherical volume element V of radius r with centre at P bounded by the spherical surface Σ contained in the vicinity of P and by means of Eq. [1, (4)] form the surface integral

$$\iint_\Sigma \varphi(M)\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_\Sigma \varphi(P)\,\mathbf{n}\,d\sigma + r\sum_{i=1}^{3}\iint_\Sigma (\mathbf{n}.\mathbf{e}_i)\,\mathbf{n}\,D_{e_i}\varphi(P)\,d\sigma + r\iint_\Sigma Q(P, M)\,\mathbf{n}\,d\sigma,$$

where the first term on the right-hand side vanishes due to the spherical form of the surface Σ and because $\varphi(P)$ is a constant with respect to integration. In virtue of Eq. [1, (7)] and noting that $D_{e_i}\varphi(P)$ and $\mathbf{e}_i$ are scalar and vector constants respectively, it follows

$$\iint_\Sigma \varphi(M)\,\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{4}{3}\pi r^3\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i D_{e_i}\varphi(P) + r\iint_\Sigma Q(P, M)\,\mathbf{n}\,d\sigma,$$

[1]) This research has been supported by the Institute of Mathematics, Belgrade.

where the integrals exist (in Riemannian sense) because $\varphi(M)$ (in virtue of the first condition of this theorem) and $Q(P, M)$ (in virtue of the both conditions) are continuous functions in the vicinity of P and so much the more on the surface Σ. Dividing the latter Eq. by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ immediately follows

$$\frac{1}{V}\iint_{\Sigma} \varphi(M)\mathbf{n}\,d\sigma = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i D_{e_i}\varphi(P) + \frac{3}{4\pi r^2}\iint_{\Sigma} Q(P, M)\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Let V tend to zero in such a way that the sphere volume shrinks to the point P while its boundary surface remains spherical. It can be proved that the second term on the right-hand side tends to zero, and by definition [1, (5)] we have

$$\nabla\varphi(P) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i D_{e_i}\varphi(P). \tag{1}$$

Now the axial derivative at P for the given direction $\mathbf{s}$ is dealt with.

Let $\mathbf{t}$ be the unit tangent vector field to a circular curve with centre at P in the plane referred to the given unit normal vector $\mathbf{s}$. The unit outer normal vector to the curve is given by $\mathbf{n} = \mathbf{t}\times\mathbf{s}$.

Consider the circular plane surface element S of radius r with centre at P bounded by the circular curve Λ contained in the plane and by Eq. [1, (4)] form the line integral

$$\int_{\Lambda} \varphi(M)\mathbf{t}\,d\lambda = \int_{\Lambda} \varphi(P)\mathbf{t}\,d\lambda + r\sum_{i=1}^{3}\int_{\Lambda} (\mathbf{e}_i . (\mathbf{t}\times\mathbf{s}))\,\mathbf{t}\,D_{e_i}\varphi(P)\,d\lambda + r\int_{\Lambda} Q(P, M)\,\mathbf{t}\,d\lambda,$$

where the first term on the right-hand side vanishes. Applying Eq. [1, (10)] to the second term on the right-hand side (by the preliminary use of the identity $\mathbf{e}_i . (\mathbf{t}\times\mathbf{s}) \equiv \mathbf{t} . (\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)$), noting that $\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i$ is a constant, and dividing the latter Eq. by $S = \pi r^2$, it is obtained

$$\frac{1}{S}\int_{\Lambda} \varphi(M)\mathbf{t}\,d\lambda = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\,D_{e_i}\,\varphi(P) + \frac{1}{\pi r}\int_{\Lambda} Q(P, M)\,\mathbf{t}\,d\lambda,$$

where the integrals exist due to the continuity of functions $\varphi(M)$ and $Q(P, M)$ in the vicinity of P.

It can be shown that the second term on the right-hand side converges to zero in the certain limiting process and by definition [1, (6)] it follows

$$\nabla_s\varphi(P) = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\,D_{e_i}\varphi(P). \tag{2}$$

The following consequence of the Theorem 1 should be formulated:

If a scalar field φ fulfils the conditions of the Theorem 1, the space derivatives at the point P satisfy the relation

$$\nabla_s\varphi(P) = \mathbf{s}\times(\nabla\varphi(P)). \tag{3}$$

Proof follows immediately from Eqs. (1) and (2).

3. Vector Field

Theorem 2. *If a vector filed* **F** *is*
1) *continuous in a vicinity of a point* P *and*
2) *differentiable at* P,
then there exist the polar derivatives $\nabla.\mathbf{F}(P)$, $\nabla\times\mathbf{F}(P)$ *and, for the direction given by the unit vector* **s**, *the axial derivatives* $\nabla_s\,.\,\mathbf{F}(P)$, $\nabla_s\times\mathbf{F}(P)$. *These space derivatives are expressed in terms of directional derivatives at* P *in three mutually orthogonal directions by Eqs.* (4), (5) *and* (6), (7), *respectively.*

Proof. Since the proof of this theorem is analogous to that of the Theorem 1, it will be given in a briefer form.

1. Consider the spherical volume element V of radius r with centre at P bounded by the spherical surface Σ contained in the vicinitiy of P and by Eq. [1, (4)] form the surface integral

$$\iint_\Sigma \mathbf{n}.\,\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Sigma \mathbf{n}\,.\,\mathbf{F}(P)\,\mathrm{d}\sigma + r\sum_{i=1}^{3}\iint_\Sigma (\mathbf{n}\,.\,\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{n}\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P))\,\mathrm{d}\sigma + \\ + r\iint_\Sigma \mathbf{n}.\mathfrak{Q}(P, M)\,\mathrm{d}\sigma,$$

where the first term on the right-hand side vanishes. In virtue of Eq. [1, (8)] and dividing the above Eq. by $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, it follows

$$\frac{1}{V}\iint_\Sigma \mathbf{n}.\,\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P) + \frac{3}{4\pi r^2}\iint_\Sigma \mathbf{n}\,.\,\mathfrak{Q}(P, M)\,\mathrm{d}\sigma.$$

As the second term on the right-hand side tends to zero when $r\to 0$, we get the expression

$$\nabla\,.\,\mathbf{F}(P) = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{4}$$

2. Using Eq. [1, (4)] the following one may be formed:

$$\iint_\Sigma \mathbf{n}\times\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Sigma \mathbf{n}\times\mathbf{F}(P)\,\mathrm{d}\sigma + r\sum_{i=1}^{3}\iint_\Sigma (\mathbf{n}\,.\,\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{n}\times D_{e_i}\mathbf{F}(P))\,\mathrm{d}\sigma + \\ + r\iint_\Sigma \mathbf{n}\times\mathfrak{Q}(P, M)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Application of Eq. [1, (9)] to the second term on the right-hand side and division by $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ yield

$$\frac{1}{V}\iint_\Sigma \mathbf{n}\times\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\times D_{e_i}\mathbf{F}(P) + \frac{3}{4\pi r^2}\iint_\Sigma \mathbf{n}\times\mathfrak{Q}(P, M)\,\mathrm{d}\sigma.$$

In the limit the second term on the right-hand side tends to zero and we have

$$\nabla\times\mathbf{F}(P)=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\times D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{5}$$

3. Taking the circular plane surface element S of radius r with centre at P bounded by the circular curve Λ contained in the vicinity of P, by Eq. [1, (4)] form the line integral

$$\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{F}(P)\,\mathrm{d}\lambda+r\sum_{i=1}^{3}\int_\Lambda(\mathbf{e}_i\,.\,(\mathbf{t}\times\mathbf{s}))\,(\mathbf{t}\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P))\,\mathrm{d}\lambda+$$

$$+r\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{Q}(P,\,M)\,\mathrm{d}\lambda,$$

where the first term on the right-hand side vanishes. Using Eq. [1, (11)] and dividing the above Eq. by $S=\pi r^2$ it follows

$$\frac{1}{S}\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P)+\frac{1}{\pi r}\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{Q}\,(P,\,M)\mathrm{d}\lambda.$$

In the limit we obtain

$$\nabla_s\,.\,\mathbf{F}(P)=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{6}$$

4. In virtue of Eq. [1, (4)] we now form

$$\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{F}(P)\,\mathrm{d}\lambda+r\sum_{i=1}^{3}\int_\Lambda(\mathbf{e}_i\,.\,(\mathbf{t}\times\mathbf{s}))\,(\mathbf{t}\times D_{e_i}\mathbf{F}(P))\,\mathrm{d}\lambda+$$

$$+r\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{Q}(P,\,M)\,\mathrm{d}\lambda,$$

and using Eq. [1, (12)], by the method previously explained,

$$\frac{1}{S}\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\times D_{e_i}\mathbf{F}(P)+\frac{1}{\pi r}\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{Q}(P,\,M)\mathrm{d}\lambda$$

follows. In the limit we have

$$\nabla_s\times\mathbf{F}(P)=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\times D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{7}$$

The following statement is a consequence of the Theorem 2.

If a vector field $\mathbf{F}$ *fulfils the conditions of the Theorem 2, the space derivatives at the point* P *satisfy the relations*

$$\nabla_s\,.\,\mathbf{F}(P)=\mathbf{s}\,.\,(\nabla\times\mathbf{F}(P)), \tag{8}$$

$$\nabla_s\times\mathbf{F}(P)=\nabla(\mathbf{s}\,.\,\mathbf{F})\,(P)-\mathbf{s}\,(\nabla\,.\,\mathbf{F}(P)). \tag{9}$$

Proof is based on Eqs. (5), (6) and (4), (7), respectively.

In the limit the second term on the right-hand side tends to zero and we have

$$\nabla\times\mathbf{F}(P)=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\times D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{5}$$

3. Taking the circular plane surface element S of radius r with centre at P bounded by the circular curve Λ contained in the vicinity of P, by Eq. [1, (4)] form the line integral

$$\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{F}(P)\,\mathrm{d}\lambda+r\sum_{i=1}^{3}\int_\Lambda(\mathbf{e}_i\,.\,(\mathbf{t}\times\mathbf{s}))\,(\mathbf{t}\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P))\,\mathrm{d}\lambda+$$

$$+r\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{Q}(P,\,M)\,\mathrm{d}\lambda,$$

where the first term on the right-hand side vanishes. Using Eq. [1, (11)] and dividing the above Eq. by $S=\pi r^2$ it follows

$$\frac{1}{S}\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P)+\frac{1}{\pi r}\int_\Lambda \mathbf{t}\,.\,\mathbf{Q}\,(P,\,M)\mathrm{d}\lambda.$$

In the limit we obtain

$$\nabla_s\,.\,\mathbf{F}(P)=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\,.\,D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{6}$$

4. In virtue of Eq. [1, (4)] we now form

$$\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{F}(P)\,\mathrm{d}\lambda+r\sum_{i=1}^{3}\int_\Lambda(\mathbf{e}_i\,.\,(\mathbf{t}\times\mathbf{s}))\,(\mathbf{t}\times D_{e_i}\mathbf{F}(P))\,\mathrm{d}\lambda+$$

$$+r\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{Q}(P,\,M)\,\mathrm{d}\lambda,$$

and using Eq. [1, (12)], by the method previously explained,

$$\frac{1}{S}\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{F}(M)\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\times D_{e_i}\mathbf{F}(P)+\frac{1}{\pi r}\int_\Lambda \mathbf{t}\times\mathbf{Q}(P,\,M)\mathrm{d}\lambda$$

follows. In the limit we have

$$\nabla_s\times\mathbf{F}(P)=\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i)\times D_{e_i}\mathbf{F}(P). \tag{7}$$

The following statement is a consequence of the Theorem 2.

If a vector field $\mathbf{F}$ *fulfils the conditions of the Theorem 2, the space derivatives at the point* P *satisfy the relations*

$$\nabla_s\,.\,\mathbf{F}(P)=\mathbf{s}\,.\,(\nabla\times\mathbf{F}(P)), \tag{8}$$

$$\nabla_s\times\mathbf{F}(P)=\nabla(\mathbf{s}\,.\,\mathbf{F})\,(P)-\mathbf{s}\,(\nabla\,.\,\mathbf{F}(P)). \tag{9}$$

Proof is based on Eqs. (5), (6) and (4), (7), respectively.

Using the usual notation, Eqs. (4), (5) and (6) can be rewritten in the form (cf. [2], p. 158)

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \,.\, D_{e_i}\mathbf{F}, \qquad \text{(11)} \qquad \operatorname{curl} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \times D_{e_i}\mathbf{F},$$

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{curl}_s \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{s}\times\mathbf{e}_i) \,.\, D_{e_i}\mathbf{F}.$$

Inserting $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i F^i$ into Eqs. (10) and (11) the usual expressions for divergence and curl in rectangular coordinates are obtained. Note that Eqs. (11) and (12) show the equivalence of the two well-known alternative definitions of the curl of a vector field.

Remark. The proofs concerning polar derivatives are evolved under the assumption of spherical volume elements, but this assumption does not affect the generality of the results obtained. If the limit in Eq. [1, (5)] exists, it has the same value for any particular sequence of volume elements shrinking to the given point. The analogous conclusion is valid in the case of axial derivatives.

4. Some Interpretations

The operator ∇ of polar derivatives is just the wellknown operator „nabla" (Hamilton), what is obvious from Eqs. [1, (5)] and (1).

The operator ∇_s of axial derivatives can be represented by the symbolic vector product

$$\text{(13)} \qquad \nabla_s \equiv \mathbf{s}\times\nabla,$$

what is evident from Eqs. (3) and (8).

Let $\mathbf{s}$ be a polar vector. Then the linear differential operators ∇ and $\mathbf{s}\times\nabla$ have properties of polar and axial vectors, respectively.

It is interesting to note the following facts.

The linear momentum operator (quantum mechanical) of a particle is proportional to the operator or polar derivatives. The conservation of linear momentum is related to the homogeneousness of space.

The angular momentum operator of a particle is proportional to the operator of axial derivatives. The conservation of angular momentum is related to the isotropism of space.

The axial derivative of the given field at the given point can be treated as a function of the vector variable $\mathbf{s}$. The notion of *isotropism* of a field is introduced by the following d e f i n i t i o n.

The field (φ or $\mathbf{F}$) is isotropic at the point P if and only if the axial derivative ($\nabla_s\varphi$ or $\nabla_s.\,\mathbf{F}$) at P is independent of $\mathbf{s}$, i. e. has the same value in every direction.

If the given (scalar or vector) field is constant in a vicinity of the point P, the axial derivatives at P are equal to zero for any $\mathbf{s}$, so that a (scalar or vector) constant represents the simplest isotropic field. If the axial derivative $\nabla_s\times\mathbf{F}$ had been taken as a criterion for the isotropism of a vector field, only a vector constant would be obtained as an isotropic

field. It is apparent that not constant, but isotropic field may be of interest.

Eq. (3) implies the following statement:

A scalar filed is isotropic at stationary points (points at which the gradient vanishes).

In virtue of Eq. (8) the following statement is obtained:

A vector field isotropic at all points of a simply connected region is a potential field in this region.

The isotropism of fields provides only another insight into the problems of vector analysis.

5. Conclusions

If a scalar or vector field $\mathcal{F}$ is continous in a vicinity of a point P and differentiable at P, then there exist polar and axial derivatives at P which in the case of orthonormal basis $(\mathbf{e}_i)$ are expressed in terms of directional derivatives in the form

$$\nabla \circ \mathcal{F}(P) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \circ D_{e_i} \mathcal{F}(P)$$

(Eqs. (1), (4), (5)), and

$$(\mathbf{s} \times \nabla) \circ \mathcal{F}(P) = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_i) \circ D_{e_i} \mathcal{F}F(P)$$

(Eqs. (2), (6) (7)), where the symbol $\circ$ denotes ordinary, dot, or cross multiplication. Differentiability property and some particular cases of surface and line integrals are essential in proofs. The fact that spherical volume and circular surface elements are used in the derivations imposes no restrictions on the validity of the results. Axial derivatives are expressed in terms of polar derivatives by Eqs. (3), (8) and (9). The results are applicable to a field which is differentiable, but whose first-order partial deriderivatives are not necessarily continuous.

Received March 26, 1972

University of Belgrade,
Electroengineering Faculty,
Belgrade, Yugoslavia

REFERENCES

1. Vrcelj Z., *Space Derivatives* (I). Bul. Inst. polit. Iași, **XIX (XXIII)**, *3–4*, s. I, 45–49 (1973).
2. Wilson E. B., *Vector Analysis* (founded upon the lectures of J. W. Gibbs). Yale Univ. Press, New Haven, 1948.

DERIVATE SPAȚIALE (II)

(Rezumat)

În [1] s-a demonstrat că derivabilitatea într-un punct și continuitatea într-o vecinătate a unui cîmp sînt condiții suficiente pentru existența tuturor derivatelor spațiale ale cîmpului în punct. Se aplică acum rezultatele generale la cazul cîmpurilor realare și vectoriale, cîmpuri care interesează fizica teoretică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 517.91

ECUAŢII DIFERENŢIALE ANALITICE ÎN SPAŢII BANACH

DE

I. ONCIULENCU

1. Obiectul acestei note este o generalizare a ideii de ecuaţie diferenţială analitică în spaţii Banach, pornind de la o noţiune de funcţie analitică, pe care o definim cu ajutorul noţiunii de polinom omogen de grad n (H. Cartan [1]).

Vom demonstra că în anumite ipoteze, analoge acelora utilizate în cazul scalar, problema lui Cauchy pentru astfel de ecuaţii admite o soluţie analitică unică.

Definiţie (H. Cartan [1]). Fie E şi F două spaţii vectoriale peste un cîmp K şi fie $n \geqslant 1$. Aplicaţia $\varphi : E \to F$ se numeşte polinom omogen de grad n, dacă eixstă o aplicaţie n-liniară $f : E \times E \times \ldots \times E \to F$ încît $\varphi(x) = f(x, x, \ldots, x)$.

Convenim să numim aplicaţiile constante de la $E \to F$, polinoame omogene de grad zero.

Este adevărată următoarea

Propoziţie (H. Cartan [1]). *Dacă aplicaţia $\varphi : E \to F$ este un polinom omogen de grad n atunci există o aplicaţie n-liniară simetrică, unic determinată, $g : E^n \to F$ încît $\varphi(x) = g(x, x, \ldots, x)$.*

În cele ce urmează vom nota prin aceeaşi literă, atît polinomul omogen cît şi forma n-liniară simetrică care-l determină.

Definiţie. Fie $f : E \to F$, unde E şi F sînt spaţii Banach. f se numeşte analitică în vecinătatea $V(x_0) \subset E$ a punctului x_0, dacă

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x - x_0), \quad \forall x \in V(x_0),$$

f_j fiind polinoame omogene de grad j, determinate de formele j-liniare $f_j : E^j \to F$, continue.

Observaţie. O condiţie suficientă ca $f : E \to F$ să fie analitică în vecinătatea $V(x_0) \subset E$, este ca f să admită derivate Fréchet de orice ordin în $V(x_0)$ şi

$$\| f^n(x) \| \leqslant M, \quad \forall x \in V(x_0) \quad \text{şi} \quad \forall n \in N.$$

2. Vom demonstra acum următoarea

T e o r e m ă . *Fie ecuaţia*

$$\frac{dx}{dz} = F(z, x), \tag{1}$$

în care :

a) $F : V(0) \times U(0) \to E$, $V(0)$ *fiind o vecinătate a lui* $0 \in C$ *(cîmpul numerelor complexe,* $U(0)$ *o vecinătate a lui* 0 *din spaţiul Banach* E.

b) F *se poate scrie în forma* $F(z, x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) z^i$, *unde* $f_i : U(0) \to E$ *sînt analitice în* $U(0)$, *adică* $f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_i^j(x)$, f_i^j *fiind un polinom omogen de gradul* j.

c) *Seria numerică* $\sum_{i,j=0}^{\infty} \| f_i^j \| \, \| x \|^j \, | z |^i$ *este convergentă pentru orice pereche* $(x, z) \in U(0) \times V(0)$.

Atunci ecuaţia (1) admite o soluţie $x(z)$ *unică, analitică într-o vecinătate* $V'(0)$, *şi care satisface*

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Soluţia pe care vrem s-o determinăm, din cauza condiţiei (2) trebuie să fie de forma :

$$x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \; a_n \in E; \quad \text{atunci} \quad \frac{dx}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Urmează că trebuie să avem egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_i^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) z^i.$$

Însă :

$$f_i^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) = z^j f_i^j(a_1) + \sum_{k_i \geqslant 1}^{\infty} z^{k_1 + k_2 + \ldots + k_j} f(a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}),$$

unde $f_i^j(a_1) = f_i^j(a_1, a_1, \ldots, a_1)$.

Sîntem astfel conduşi la relaţiile :

$$a_1 = f_0^0,$$

$$2a_2 = f_0^1(a_1) + f_1^0,$$

$$3a_3 = f_0^1(a_1) + f_0^2(a_1) + f_1^1(a_1) + f_2^0,$$

. . . . . .

$$n a_n = f_0^1(a_{n-1}) + \sum_{\substack{k_1 + k_2 = n-1 \\ k_1, k_2 \geqslant 1}} f_0^2(a_{k_1}, a_{k_2}) + \ldots + f_0^{n-1}(a_1) +$$

$$+ f_1^1(a_{n-2}) + \sum_{\substack{k_1 + k_2 = n-2 \\ k_1 + k_2 \geqslant 1}} f_1^2(a_{k_1}, a_{k_2}) + \ldots + f_1^{(n-2)}(a_1) + \ldots + f_{n-1}^0,$$

. . . . . .

Este demonstrată astfel unicitatea soluției analitice. Pentru a demonstra convegența seriei formale obținute considerăm funcția scalară $\varphi : V(0) \times \times V_1(0) \to C$, definită prin

$$\varphi(z, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \| f_i^j \| y^j z^i,$$

$V_1(0)$ fiind o vecinătate a lui $0 \in C$, ce se determină din ipoteza c).

Considerăm acum ecuația

$$\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y), \tag{1'}$$

cu condiția

$$y(0) = 0. \tag{2'}$$

Pentru această ecuație există o soluție analitică unică $y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ ([2]), convergența avînd loc, într-o vecinătate $V'(0) \subset C$.

Formulele cu care se determină coeficienții α_k, se obțin din formulele găsite pentru a_k, înlocuind polinoamele f_i^j cu φ_i^j,

$$\varphi_i^j(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_j}) = \| f_i^j \| \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_j},$$

adică

$$\alpha_1 < \varphi_0^0 = \| f_0^0 \|,$$

$$2\alpha_2 = \varphi_0^1(\alpha_1) + \varphi_1^0 = \| f_0^1 \| \alpha_1 + \| f_1^0 \|,$$

$$3\alpha_3 = \varphi_0^1(\alpha_2) + \varphi_0^2(\alpha_1) + \varphi_1^1(\alpha_1) + \varphi_2^0 = \| f_0^1 \| \alpha_2 + \| f_0^2 \| \alpha_1^2 + \| f_2^0 \|, \ldots$$

Comparînd coeficienții a_k și α_k, găsim că

$$\| a_1 \| = \| f_0^0 \| = \alpha_1,$$

$$\| 2a_2 \| \leqslant \| f_0^1 \| \| a_1 \| + \| f_1^0 \| = 2\alpha_2,$$

$$\| 3a_3 \| \leqslant \| f_0^1 \| \| a_2 \| + \| f_0^2 \| \| a_1 \|^2 + \| f_1^1 \| \| a_1 \| + \| f_2^0 \| \leqslant 3\alpha_3.$$

Deci $\| a_k \| \leqslant \alpha_k$, adică seria $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ este convergentă în $V'(0)$. Teorema este astfel complet demonstrată.

O teoremă de același tip, pentru cazul cînd și variabila este dintr-un spațiu Banach oarecare o vom da într-o altă notă.

Primită la 1 decembrie 1975

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Cartan H., *Calcul Différentiel. Formes Différentielles.* Herman, Paris, 1967.
2. Haimovici A., *Ecuații diferențiale și ecuații integrale.* EDP, Buc., 1965.
3. Haimovici A., *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional.* EDP, Buc., 1966.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ANALYTIQUES DANS DES ESPACES DE BANACH

(Résumé)

Dans cette Note on étudie l'équation (1), avec la condition (2), où $F : V(z_0) \times V(x_0) \to E$, $V(z_0)$ est un voisinage de $z_0 \in C$, $V(x_0)$ un voisinage de $x_0 \in E$, un espace de Banach sur le champ C.

Supposant F analytique (dans un sens défini en partant de la définition de H. Cartan d'un polynôme homogene de degré n) on démontre que l'équation (1) avec la condition (2) a une seule solution analytique dans un voisinage $V'(z_0) \subset C$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 517.948

ÉQUATIONS INTÉGRALES À SOLUTIONS DANS L'ESPACE DE FONCTIONS RÉGLÉES

PAR

GH. BANTAŞ

Cette Note se réfère à l'existence et l'unicité des solutions de certaines classes d'équations intégro-fonctionelles de Volterra dans l'espace $D(R_a, R^p)$ défini plus bas. La techinque de travail utilisée ici est fondée sur la méthode de M a s s e r a - S c h ä f f e r - C o r d u n e a n u ([7], [1]—[4]), sur le théorème de point fixe de Banach et sur un théorème de T-admissibilité (Théorème 1).

Soit $R_a = [a, \infty)$ avec $a \in R$, R^p l'espace euclidien réel à p dimensions et $B(R_a, R^p)$ l'espace de fonctions $x : R_a \to R^p$ bornées sur R_a. Dans l'espace $B(R_a, R^p)$ nous considérons le sous espace de Banach $D(R_a, R^p)$ de fonctions réglées ([5], [9]) et dont la norme est définie par

$$\| x \| = \sup_{t \geqslant a} \| x(t) \| ,$$

où $\| x(t) \|$ est la longueur euclidienne du vecteur $x(t)$.

La sphère de centre O et de rayon ρ de l'espace $D(R_a, R^p)$ sera notée par S. Soit $\tilde{D}(R_a, R)$ l'espace des matrices carrées d'ordre p avec les éléments dans $D(R_a, R)$.

Soit K une matrice carrée d'ordre p, définie sur l'ensemble $\Delta = \{(t, s)/a \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ et absolument sommable relatif à $s \in [a, t]$ pour chaque valeur fixée t de R_a. Nous noterons par $\| K \|$ la norme usuelle de cette matrice et nous considérons l'application linéaire T définie sur $D(R_a, R^p)$ par la relation :

$$(Tx)(t) = \int_a^t K(t, s)x(s)\, ds, \qquad (t \geqslant a).$$

Ensuite nous considérons les fonctions Φ, Φ_b et Ψ définies sur R_a par les relations :

$$\Phi(t) = \int_a^t K(t, s)\mathrm{d}s, \quad \Phi_b(t) = \int_a^b K(t, s)\mathrm{d}s, \quad \Psi(t) = \int_a^t \| K(t, s) \|\mathrm{d}s,$$

où $b \in R_a$. Nous poserons $\mathbf{C} = \sup_{t \geq a} \| \Psi(t) \|$.

Définition. Un couple d'espaces de Banach E, $F \subset B(R_a, R^p)$ s'appelle T-admissible si $TE \subset F$ ([1]).

Proposition. *Si le couple* (D, D) *est* T*-admissible alors les conditions suivantes sont satisfaites*:

1) T *est continue sur* $D(R_a, R^p)$;
2) $\Phi \in \tilde{D}(R_a, R)$;
3) $\Phi_b \in \tilde{D}(R_a, R)$, $\forall (b \geq a)$;
4) $\Psi \in B(R_a, R)$;
5) $\| Tx \| \leq \mathbf{C} \| x \|$, $\forall (x \in D(R_a, R^p))$.

Démonstration. 1) L'affirmation résulte du théorème du graphe fermé ([6], p. 57) employant le théorème de Lebesgue ([8], p. 166).

2) et 3) Les relations résultent sans difficulté de l'hypothèse de travail.

4) Si la relation n'est pas vérifiée, alors il existe une composante K_{ij} de K et une suite $(t_n) \subset R_a$ qui tend vers $+\infty$, telles que

$$\int_a^t | K_{ij}(t_m, s) | \, \mathrm{d}s > m, \quad \forall (m \in N).$$

Utilisant le théorème de Lusin ([8], p. 118) on peut déduire, pour chaque $m \geq 1$ fixé, l'existence d'une fonction $u_m \in D(R_a, R)$ telle que

$$(1) \qquad | u_m(t) | \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_a^{t_m} K_{ij}(t_m, s) u_m(s)\mathrm{d}s > m, \quad (t \geq a).$$

Considérons, pour m fixé, la fonction vectorielle x^m, dont la composante d'ordre j soit u_m et les autres composantes soient nulles.

De 1) et du fait que $x^m \in D(R_a, R^p)$ résulte l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{t \geq a} \left\| \int_a^t K(t, s) x^m(s)\, \mathrm{d}s \right\| \leq M, \quad \forall (m \in N).$$

Il en résulte que

$$\int_a^{t_m} K_{ij}(t_m, s) u_m(s)\, \mathrm{d}s \leq M, \quad \forall (m \in N).$$

De ceci et de (1) résulte l'absurdité qui prouve la relation 3).

5) Cette affirmation est obtenue en utilisant la relation 4).

Théorème 1. *Le couple* (D, D) *est T-admissible si et seulement si on a* :

1) $\Phi_b \in \tilde{D}(R_a, R), \quad \forall (b \geqslant a)$;

2) $\Phi \in \tilde{D}(R_a, R)$;

3) $\Psi \in B(R_a, R)$.

Demonstration. La nécessité des conditions 1), 2) et 3) résulte de la Proposition précédente. Leur suffisance peut être démontrée de la manière suivante : D'après la condition 3), il résulte que $TD(R_a, R^p) \subset B(R_a, R^p)$. Il reste à demontrer que Tx est une fonction réglée pour chaque x de $D(R_a, R^p)$. Ce fait se réduit à la démonstration que la restriction de Tx à l'intervale $[a, b]$ de R_a est une fonction réglée. Pour les fonctions en escalier ce fait résulte d'après les conditions 1) et 2). Pour les autres fonctions x de $D(R_a, R^p)$ ce fait se démontre ainsi : Soit $x \in D(R_a, R^p)$ et $[a, b] \subset R_a$. D'après le théorème de N. Bourbaki ([9], p. 132), la restriction de la fonction x à l'intervalle $[a, b]$ est la limite d'une suite de fonctions en escalier $x_n : [a, b] \to R^p$, qui converge uniformément sur $[a, b]$.

Soit

$$v_n(t) = \int_a^t K(t, s)x_n(s)\,ds \quad \text{et} \quad v(t) = \int_a^t K(t, s)x(s)\,ds,$$

où $t \in [a, b]$ et $n \in N$. Comme x_n est une fonction en escalier, il résulte que v_n est une fonction réglée. À partir de la définition des fonctions v_n et v et tenant compte de la condition 3), nous pouvons établir que

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} \| v_n(t) - v(t) \| \leqslant \mathbf{C} \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \| x_n(t) - x(t) \|.$$

De ceci et du fait que (x_n) est une suite qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction x il résulte que la suite (v_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction v. Par conséquent ([9], p. 132) on peut conclure que v est une fonction réglée.

Considérons l'équation intégro-fonctionnelle

$$(E) \qquad x = F_1(x) + TF_2(x),$$

où F_1 et F_2 sont deux opérateurs définis sur la sphère S et avec les valeurs dans l'espace $D(R_a, R^p)$. Dans ce qui suit nous allons noter par r, r_1 et r_2 des nombres positives.

Théorème 2. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites* :

1) *Les hypothèses du Théorème 1* ;

2) $\| F_i x - F_i y \| \leqslant r_i \| x - y \| \quad \forall (x, y \in S), \quad (i = 1, 2)$;

3) $\lambda = 1 - r_1 - \mathbf{C}r_2 > 0 \quad$ et $\quad \| F_1 O \| + \mathbf{C} \| F_2 O \| \leqslant \lambda\rho$.

Alors l'équation (E) *admet une solution unique* $x \in S$.

Démonstration. On applique le principe de point fixe de Banach, dans lequel on prend comme éléments principaux la sphère S et l'opérateur $U = F_1 + TF_2$. De la définition des opérateurs F_i, de la condition 1) et du Théorème 1, il résulte que $US \subset D$. Vu les condition 2) et 3), le Théorème 1 et la Proposition précédente, on peut montrer que $US \subset S$. En utilisant la condition 2), la Proposition précédente et le Théorème 1, on peut conclure que pour chaque x, $y \in S$ on a:

$$\| Ux - Uy \| \leqslant (r_1 + \mathbf{C}r_2) \| x - y \|.$$

De ceci et de 3) il s'ensuit que l'opérateur U est contractant.

Soit l'équation intégrale

$$(E_1) \qquad x(t) = F_1(t, x(t)) + \int_a^t K(t, s) F_2(s, x(s))\, ds,$$

dans laquelle K est la matrice carrée mentionnée au début de cette Note x est la fonction inconnue de $D(R_a, R^p)$ et F_i sont des fonctions p-vectoriel les réelles définies sur $R_a \times \sum$, où $\sum \subset R^p$ désigne la sphère de centre O et de rayon ρ. Les fonctions F_i seront précisées dans le résultat suivant :

Corollaire 1. *Supposons que l'équation* (E_1) *satisfait aux conditions* :

1) K *satisfait aux hypothèses du Théorème 1* ;

2) *Les fonctions* $(t, x) \to F_i(t, x)$ *sont réglées par rapport à* $t \in R_a$ *pour chaque valeur fixée* x *de* $\sum$;

3) *Pour chaque* $t \geqslant a$ *et* $x, y \in \sum$, *on a* :

$$\| F_i(t, x) - F_i(t, y) \| \leqslant r_i \| x - y \|, \quad (i = 1, 2) ;$$

4) $\lambda = 1 - r_1 - \mathbf{C}r_2 > 0$ et $\| F_1(., 0) \| + \mathbf{C} \| F_2(., 0) \| \leqslant \lambda\rho$.

Alors (E_1) *admet une solution unique* $x \in S$.

Soit l'équation intégrale

$$(E_2) \qquad x(t) = F(t) + \int_a^t G(t, s ; x(s))\, ds + \int_a^t K(t, s)\, H(s, x(s))\, ds$$

dans laquelle K est la matrice carrée mentionnée au début de cette Note, x est la fonction inconnue de $D(R_a, R^p)$ et F, G, H sont des fonctions p-vectorielles définies respectivement sur R_a, $\Delta \times \sum$ et $R_a \times \sum$. Les fonctions F, G et H seront precisées dans le résultat suivat :

Corollaire 2. *Supposons que l'équation* (E_2) *satisfait aux conditions* :

1) K *satisfait aux hypothèses du Théorème 1* ;

2) *Pour chaque valeur* $x \in \sum$, *la fonction* $(t, x) \to H(t, x)$ *est réglée par rapport à* $t \in R_a$. *De plus, pour chaque* $t \geqslant a$ *et* $x, y \in \sum$ *on a :*

$$\| H(t, x) - H(t, y) \| \leqslant r \| x - y \| ;$$

3) *Pour chaque* $t \in R_a$ *la fonction* $(t, s) \to G(t, s ; 0)$ *est absolument sommable par rapport à* $s \in [a, t]$. *De plus, pour chaque* $(t, s) \in \Delta$ *et* $x, y \in \sum$ *on a :*

$$\| G(t, s ; x) - G(t, s ; y) \| \leqslant A(t, s) \| x - y \|,$$

où $A : \Delta \to [0, \infty)$ *est une fonction sommable par rapport à* $s \in R_a$ *pour chaque* $t \in R_a$. *De plus,*

$$\int_a^t A(t, s)\, \mathrm{d}s \leqslant r_1 \qquad \forall (t \geqslant a) ;$$

4) *Pour chaque* $(b, x) \in R_a \times \sum$, *les fonctions* $\int_a^b G(., s ; x)\, \mathrm{d}s$ *et* $\int_a^t G(., s ; x)\, \mathrm{d}s$ *sont réglées sur* R_a.

5) $F \in D(R_a, R^p)$, $\lambda = 1 - r_1 - \mathbf{C}r > 0$ *et* $\left| F(t) + \int_a^t G(t, s ; 0)\mathrm{d}s \right| + \mathbf{C} \| H(t, 0) \| \leqslant \lambda\rho$.

Alors (E_2) *admet une solution unique* $x \in S$.

Reçue le 12 novembre 1973

Université „Al. I. Cuza", Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C., *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra.* Ann. Mat. Pura Appl., **67 (4)**, 349–363 (1965).
2. Corduneanu C., *Sur certaines équations fonctionnelles de Volterra.* Funkcial Ekvac., *9*, 119–127 (1966).
3. Corduneanu C., *Some Perturbation Problems in the Theory of Integral Equations.* Math. Systems Theory, **1 (2)**, 143–155 (1967).
4. Corduneanu C., *Admissibility with Respect to an Integral Operator and Applications.* Studies in Appl. Math., *5*, 55–63 (1969).
5. Dieudonné J., *Éléments d'analyse.* I, Gauthiers Villars, Paris, 1969.
6. Dunford N., Schwartz J., *Linear Operators.* Part. I, Interscience, New York, 1958.
7. Massera J. L., Schäffer J. J., *Linear Differential Equations and Functional Analysis.* Ann. of Math., **67**, 517–573 (1958).

8. Natanson I. P., *La théorie des fonctions d'une variable réelle* (en russe). Moscou, 1957.
9. Nicolescu M., *Analiză Matematică*. T. 2, Buc., 1958.

ECUAȚII INTEGRALE CU SOLUȚII ÎN SPAȚIUL FUNCȚIILOR RIGLATE

(Rezumat)

În spațiul Banach al funcțiilor riglate se dau cîteva teoreme de existență și unicitate pentru soluțiile unor clase de ecuații integro-funcționale Volterra.

Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 528.06

O METODĂ ANALITICĂ DE CALCUL AL DEPLASĂRILOR ORIZONTALE ALE CONSTRUCȚIILOR FOLOSIND MĂSURĂRILE TOPOGEODEZICE

DE

GH. NISTOR

1. Creșterea importantă a volumului de construcții mari, înlocuirea treptată a procedeelor tradiționale de construcție și aplicarea unor sisteme noi, a pus în fața specialiștilor necesitatea cunoașterii amănunțite a modificărilor formelor geometrice și pozițiilor în spațiu a construcțiilor, atît în perioada execuției, cît și după darea lor în exploatare. Metodele topogeodezice au o utilizare largă la analiza comportării construcțiilor mari, deoarece asigură o precizie ridicată de măsurare a deplasărilor orizontale și verticale.

În lucrare se prezintă o nouă metodă analitică de calcul al deplasărilor orizontale ale construcțiilor observate, care prezintă o eficiență ridicată în raport cu metodele folosite în prezent. Totodată, se dau relațiile ce permit o evaluare complexă a preciziei rezultatelor și se face analiza condițiilor optime de determinare a deplasărilor orizontale ale construcțiilor observate.

2. În cazul metodei trigonometrice, determinarea deplasărilor orizontale ale punctelor de control, fixate pe construcția observată, se face în raport cu o bază de lungime fixă. Capetele bazei, amplasate pe terenuri nedeformabile, sînt puncte de stație, din care se efectuează ciclic măsurări asupra punctelor de control.

Se alege sistemul rectangular de axe astfel ca punctul de stație, A, să fie originea iar axa Y să corespundă cu baza fixă AB (fig. 1). Pentru determinarea punctului de control P de pe construcția observată, se măsoară lungimea bazei $AB = b$ și unghiurile orizontale α și β. Coordonatele bipolare ale punctului de control P în ciclul inițial de observații, vor fi

$$(1) \qquad X = \frac{b \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}, \qquad Y = \frac{b \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Datorită acțiunii forțelor orizontale, punctul de control P se va deplasa în plan orizontal, împreună cu construcția, în unul din punctele: P_1, P_2, P_3 sau P_4. În cazul deplasării punctului de control din poziția P în poziția P_1, în ciclul actual se măsoară unghiurile α_1 și β_1. Deoarece baza rămîne constantă, coordonatele punctului deplasat P_1 vor fi

$$(2) \qquad X_1 = \frac{b \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \beta_1}, \qquad Y_1 = \frac{b \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \beta_1}.$$

Componentele deplasării orizontale ale punctului de control, pe cele două axe, vor fi

$$(3) \qquad \Delta X = X_1 - X, \quad \Delta Y = Y_1 - Y.$$

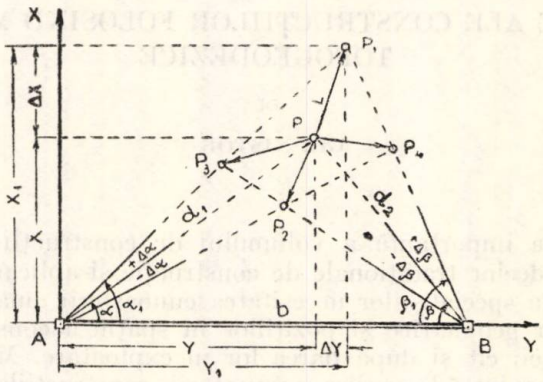

Fig. 1

Acest mod de determinare este foarte greoi. De aceea, s-a căutat o metodă analitică de calcul al componentelor deplasării orizontale funcție directă de diferențele unghiurilor orizontale, care să asigure o rapiditate a calculului și o precizie ridicată.

Pentru componentele deplasării orizontale ale punctului de control, din poziția P în poziția P_1, se poate scrie

$$(4) \qquad \Delta X = X_1 - X = \frac{b \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta)}{\operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) + \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta)} - \frac{b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta},$$

$$(5) \qquad \Delta Y = Y_1 - Y = \frac{b \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta)}{\operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) + \operatorname{tg} (\beta + \Delta\beta)} - \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Deplasările construcțiilor fiind mici, înseamnă că și diferențele $\Delta\alpha$ și $\Delta\beta$ vor fi mici; în relațiile (4) și (5) tangentele sumelor de unghiuri se vor putea scrie

$$(6) \qquad \operatorname{tg} (\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \Delta\alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \Delta\alpha} \cong \frac{\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{\Delta\alpha}{\rho}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \dfrac{\Delta\alpha}{\rho}}.$$

În acest fel, după o serie de transformări, relațiile (4) și (5) devin

$$\Delta X = b\frac{A\frac{\Delta\alpha}{\rho} + B\frac{\Delta\beta}{\rho} + C\frac{\Delta\alpha}{\rho}\frac{\Delta\beta}{\rho}}{M + N\frac{\Delta\alpha}{\rho} + P\frac{\Delta\beta}{\rho} - Q\frac{\Delta\alpha}{\rho}\frac{\Delta\beta}{\rho}}, \tag{7}$$

unde:

$$A = \operatorname{tg}^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha),\quad B = \operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta),$$

$$C = \operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta) + \operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha),\quad M = Q = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2,$$

$$N = P = \operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\beta) + \operatorname{tg}\beta(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$$

și

$$\Delta Y = b\frac{-A_1\frac{\Delta\alpha}{\rho} + B_1\frac{\Delta\beta}{\rho} + C_1\frac{\Delta\alpha}{\rho}\frac{\Delta\beta}{\rho} - D_1\left(\frac{\Delta\beta}{\rho}\right)^2}{M + N\frac{\Delta\alpha}{\rho} + P_1\frac{\Delta\beta}{\rho} - Q_1\frac{\Delta\alpha}{\rho}\frac{\Delta\beta}{\rho} - R_1\left(\frac{\Delta\beta}{\rho}\right)^2}, \tag{8}$$

unde:

$$A_1 = \operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha),\quad B_1 = \operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta),\quad C_1 = 2\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\beta),$$

$$D_1 = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\beta),\quad P_1 = \operatorname{tg}\alpha(1-3\operatorname{tg}^2\beta) + \operatorname{tg}\beta(1-2\operatorname{tg}^2\alpha) - \operatorname{tg}^3\beta,$$

$$Q_1 = \operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(3-\operatorname{tg}^2\beta) + 2\operatorname{tg}^2\beta,$$

$$R_1 = \operatorname{tg}^2\beta(1-\operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\beta).$$

În forma obținuă, relațiile (7) și (8) nu sînt practice. Aducerea la o formă corespunzătoare nevoilor practice s-a făcut prin dezvoltare în serie, obținîndu-se

$$\Delta X = b\left[\frac{A}{M}\frac{\Delta\alpha}{\rho} + \frac{B}{M}\frac{\Delta\beta}{\rho} + \frac{CM - BN - AR}{M^2}\frac{\Delta\alpha}{\rho}\frac{\Delta\beta}{\rho} - \frac{BP}{M^2}\left(\frac{\Delta\beta}{\rho}\right)^2\right], \tag{9}$$

$$\Delta Y = b\left[-\frac{A_1}{M}\frac{\Delta\alpha}{\rho} + \frac{B_1}{M}\frac{\Delta\beta}{\rho} + \frac{C_1M - B_1N - A_1P_1}{M^2}\frac{\Delta\alpha}{\rho}\frac{\Delta\beta}{\rho} - \frac{B_1P_1}{M^2}\left(\frac{\Delta\beta}{\rho}\right)^2\right]. \tag{10}$$

În relațiile (9) și (10) influența ultimilor doi termeni din paranteze este neglijabilă astfel că pentru componentele deplasării orizontale se poate scrie

$$\Delta X = \frac{bA}{\rho M}\Delta\alpha + \frac{bB}{\rho M}\Delta\beta,\qquad \Delta Y = -\frac{bA_1}{\rho M}\Delta\alpha + \frac{bB_1}{\rho M}\Delta\beta. \tag{11}$$

Precizia impusă în astfel de situații a făcut să se înlocuiască din expresiile A, B A_1, B_1 și M, funcția tangentă prin funcțiile sinus și cosinus. Formulele definitive pentru calculul componentelor deplasării orizontale ale punctului de control, din poziția $P(\alpha, \beta)$ în poziția $P_1(\alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta)$, sînt

$$\Delta X = K_2\Delta\alpha'' + L_2\Delta\beta'', \tag{12}$$

$$\Delta Y = -K_1\Delta\alpha'' + L_1\Delta\beta'', \tag{13}$$

unde s-a notat cu:

$$G = b/\rho\sin^2(\alpha+\beta),\quad K_1 = -G\sin\beta\cos\beta,\quad L_1 = G\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$K_2 = G\sin^2\beta,\quad L_2 = G\sin^2\alpha.$$

Formulele (12) și (13) au caracter de generalitate, fiind valabile pentru calculul deplasării punctului P în oricare din pozițiile P_1, P_2, P_3, P_4, diferențele $\Delta\alpha''$ și $\Delta\beta''$ intrînd în calcul cu semnele respective. Mărimile $-K_1$, L_1, K_2 și L_2, sînt calculate cu elementele măsurate în ciclul inițial și sînt constante pentru toate ciclurile de observații ulterioare.

3. Componentele deplasării orizontale a punctului de control fiind funcții de elemente măsurate direct, pentru calculul erorilor medii pătratice s-a folosit formula erorii medii pătratice a unei funcții de mărimi măsurate direct [1] rezultînd

$$m_{\Delta X}^2 = \Delta X^2\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + (\Delta X\operatorname{ctg}\gamma + L_1\Delta\beta)^2\left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + (K_1\Delta\alpha + \Delta X\operatorname{ctg}\gamma)^2\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + K_2^2\left(\frac{m_{\Delta\alpha}}{\rho}\right)^2 + L_2^2\left(\frac{m_{\Delta\beta}}{\rho}\right)^2, \tag{14}$$

$$m_{\Delta Y}^2 = \Delta Y^2\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left[\Delta Y\operatorname{ctg}\gamma + \left(\frac{G}{2} - L_2\right)\Delta\beta\right]^2\left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + \left[\left(-\frac{G}{2} + K_2\right)\Delta\alpha + \Delta Y\operatorname{ctg}\gamma\right]^2\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + K_1^2\left(\frac{m_{\Delta\alpha}}{\rho}\right)^2 + L_1^2\left(\frac{m_{\Delta\beta}}{\rho}\right)^2. \tag{15}$$

Relațiile (14) și (15) corespund cazului general, cînd unghiurile s-au măsurat cu precizie diferită astfel că, $m_\alpha \neq m_\beta \neq m_{\alpha_1} \neq m_{\beta_1}$ și deci $m_{\Delta\alpha} = \pm\sqrt{m_\alpha^2 + m_{\alpha_1}^2}$, $m_{\Delta\beta} = \pm\sqrt{m_\beta^2 + m_{\beta_1}^2}$. Cînd unghiurile s-au măsurat cu aceeași precizie în ambele cicluri de observații, înseamnă că $m_\alpha = m_\beta = m_{\alpha_1} = m_{\beta_1}$ și deci, $m_{\Delta\alpha} = m_{\Delta\beta} = \pm m_\alpha\sqrt{2}$; formulele (14) și (15) se simplifică.

Mărimea vectorului deplasării orizontale, precum și orientarea lui, vor fi date de relațiile

$$L = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{(K_2\Delta\alpha'' + L_2\Delta\beta'')^2 + (-K_1\Delta\alpha'' + L_1\Delta\beta'')^2}, \tag{16}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta Y}{\Delta X}. \tag{17}$$

Deoarece mărimile K_1, L_1, K_2 și L_2 sînt constante pentru toate ciclurile de observații, s-a stabilit eroarea medie pătratică a deplasării funcție de mărimile măsurate, $\Delta\alpha''$ și $\Delta\beta''$, obținînd

$$(18)\quad m_L = \frac{m_{\Delta\alpha}}{\rho L}\sqrt{\Delta X^2(K_2^2+L_2^2)+\Delta Y^2(K_1^2+L_1^2)-2\Delta X\Delta Y(K_1K_2-L_1L_2)}.$$

Admițînd că $\alpha = \beta$ și deci, $d_1 = d_2 = d$, relația (18) devine

$$(19)\quad m_L = \frac{m_{\Delta\alpha}\, d\sqrt{2}}{\rho L \sin\gamma}\sqrt{\Delta X^2\cos^2\frac{\gamma}{2}+\Delta Y^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Din analiza relației (19) rezultă că eroarea medie pătratică a deplasării este direct proporțională cu distanța de la punctele de stație la punctul de control și invers proporțională cu mărimea deplasării și sinusul unghiului dintre dreptele de determinare.

4. Analiza condițiilor optime de determinare a deplasării orizontale a punctului de control, este în legătură cu cazul determinării optime a punctului prin intersecție unghiulară înainte.

Coordonatele bipolare ale punctului, date de (1), sînt funcții de elementele măsurate α și β, baza considerîndu-se fără eroare. Prin aplicarea formulei erorii medii pătratice a unei funcții de mărimi măsurate direct, se obține eroarea medie pătratică relativă în poziția punctului P (pentru $\alpha = \beta$ și $m_\alpha = m_\beta$)

$$(20)\quad \frac{m}{d} = \frac{m_\alpha\sqrt{2}}{\rho}\frac{1}{\sin\gamma}.$$

Eroarea medie pătratică relativă va fi minimă cînd unghiul sub care se intersectează dreptele de orientare este un unghi drept ($\gamma = 100^g$). Deoarece mărimea m furnizează limite prea largi pentru aprecierea poziției punctului și de asemenea, nu permite determinarea direcțiilor în care abaterile punctului au valori maxime sau minime, la aprecierea preciziei în poziția punctului se folosește elipsa erorilor [5].

Pentru cazul cînd $\alpha = \beta$ și $d_1 = d_2 = d$, semiaxele elipsei erorilor și orientarea elipsei sînt

$$(21)\quad A = \frac{m_\alpha d}{\rho\sqrt{2}}\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}},\qquad B = \frac{m_\alpha d}{\rho\sqrt{2}}\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$(22)\quad \operatorname{tg} 2\theta = 0.$$

Din ultima egalitate rezultă că $\theta_1 = 0^g$ și $\theta_2 = 100^g$, adică în acest caz, axele elipsei erorilor coincid cu axele de coordonate, avînd loc egalitățile $m_X = A$ și $m_Y = B$. Efectuînd raportul semiaxelor va rezulta că $\frac{A}{B} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Cînd $\gamma = 100^g$, $A = B$; elipsa erorilor degenerează într-un cerc al erorilor.

Mărimea relativă a suprafeței elipsei erorilor, în raport cu suprafața cercului de rază d, se exprimă prin formula

$$(23)\quad \frac{S_e}{\pi d^2} = \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}\frac{1}{\sin\gamma}.$$

Minimul suprafeței relative a elipsei erorilor se obține pentru $\gamma = 100^g$.

La măsurarea deplasărilor orizontale a punctului de control sînt importante mărimile relative ale erorilor deoarece, în acest caz, se urmărește măsurarea deplasării unor puncte în spațiu și nu raportul față de o bază (pentru analiza erorilor absolute a se vedea [5]).

Spre deosebire de determinarea punctului prin intersecție unghiulară înainte, la determinarea deplasării orizontale eroarea medie pătratică depinde, în primul rînd, de poziția vectorului deplasării față de sistemul de axe. Din acest punct de vedere se analizează trei cazuri caracteristice și anume:

a) Cazul cînd vectorul deplasării este paralel cu axa X, adică $\Delta X = L_1$ și $\Delta Y = 0$. Relația (19) devine

$$m_{L_1} = \frac{m_{\Delta\alpha} d}{\rho\sqrt{2}} \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{24}$$

Minimul erorii medii pătratice a deplasării are loc atunci cînd $\gamma = 200^g$.

b) Cazul cînd vectorul deplasării este paralel cu axa Y, adică $\Delta X = 0$ și $\Delta Y = L_2$. Relația (19) devine

$$m_{L_2} = \frac{m_{\Delta\alpha} d}{\rho\sqrt{2}} \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{25}$$

Minimul erorii medii pătratice a deplasării are loc pentru $\gamma = 0^g$.

c) Cazul cînd vectorul deplasării este orientat pe direcția bisectoarei sistemului de axe, adică $\Delta X = \Delta Y$ și $L_3 = \Delta X\sqrt{2}$. Relația (19) devine

$$m_{L_3} = \frac{m_{\Delta\alpha} d}{\rho} \frac{1}{\sin\gamma}. \tag{26}$$

Minimul erorii medii pătratice a deplasării are loc pentru $\gamma = 100^g$.

Comparînd relațiile (24) și (25) cu relațiile (21), precum și relația (26) cu (20), se observă că ele sînt asemănătoare cu singura deosebire că în (24), (25) și (26) intră eroarea $m_{\Delta\alpha}$ iar în (20) și (21) intră eroarea m_α. Făcînd substituția $m_{\Delta\alpha} = m_\alpha\sqrt{2}$ rezultă că

$$m_{L_1} = A\sqrt{2} = 1{,}41\,A, \quad m_{L_2} = B\sqrt{2} = 1{,}41\,B, \quad m_{L_3} = m. \tag{27}$$

Egalitățile (27) arată că eroarea medie pătratică a deplasării, în primul caz, este de 1,41 ori mai mare decît semiaxa mare a elipsei erorilor; în al doilea caz este de 1,41 ori mai mare decît semiaxa mică a elipsei erorilor; în al treilea caz este egală cu eroarea medie pătratică în poziția punctului de control.

5. În încheiere, se pot desprinde următoarele concluzii:

a) Noua metodă analitică de calcul al deplasării orizontale a punctului de control de pe construcția observată, prezintă o eficiență ridicată

față de metodele analitice și trigonometrice folosite în prezent. Este mai rapidă decît însăși metoda grafică, avînd și avantajul asigurării unei precizii proprii metodelor numerice.

b) Formulele (14) și (15) permit calculul complex al erorilor medii pătratice ale componentelor deplasării în funcție de toate elementele măsurate iar formula (18) permite calculul direct al erorii vectorului deplasării.

c) Stabilirea condițiilor optime de determinare a deplasării orizontale, funcție de poziția vectorului deplasării, dă posibilitatea alegerii soluțiilor optime de urmărire a comportării construcțiilor prin metode topogeodezice.

d) Analiza formulelor (24), (25) și (26) conduce la concluzia că, în cazul cînd dreptele de determinare se intersectează sub unghi drept, eroarea medie pătratică a deplasării nu mai depinde de poziția vectorului deplasării.

e) Cînd se poate stabili anticipat care va fi direcția de deplasare a construcției în plan orizontal, se va lua unghiul γ astfel ca, pe direcția respectivă, eroarea să fie minimă. În caz contrar, se va lua $\gamma=100^g$, deoarece în acest caz, erorile medii pătratice ale deplasării sînt egale, indiferent de poziția vectorului deplasării.

Primită la 10 noiembrie 1975

Institutul politehnic, Iași,
Laboratorul de topografie
și fotogrammetrie

BIBLIOGRAFIE

1. Botez M., *Teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate.* EDP, Buc., 1961.
2. Ghițău D., *Geodezie—Triangulație.* EDP, Buc., 1972.
3. Nistor Gh. și colab., *Studiul comportării unui pod de beton precomprimat folosind metode geodezice.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII (XXI)**, *1—2*, s. V (1971).
4. Nistor Gh. și colab., *Un nou procedeu de calcul a intersecției înainte.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIX (XXIII)**, *1—2*, s. V (1973).
5. Nistor Gh., *Optimizarea intersecției înainte.* Bul. Inst. polit. Iași, XX (XXIV), *3—4*, s. V (1974).

UNE MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LE CALCUL DES DÉPLACEMENTS HORIZONTALS DES CONSTRUCTIONS PAR DES MESURES TOPOGÉODÉSIQUES

(Résumé)

On présent une méthode analytique pour le calcul des déplacements horizontals des constructions observées, en utilisant des éléments de mesures topogéodésiques. On établit les relations qui permettent une évaluation complexe de la précision des résultats et on étudie les conditions optimales pour la détermination des déplacements horizontals.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 531.31

THE MANGERON-DELEANU EQUATIONS IN POINCARÉ-ČETAEV VARIABLES

BY

Q. K. GHORI

1. Introduction

The aim of the present paper is to provide a group-theoretic treatment of the motion of nonholonomic systems of higher order. Based on the Mangeron principle, a generalization of the Mangeron-Deleanu equations of motion to Poincaré-Četaev variables is obtained. The theory is illustrated by an example of a nonholonomic system of the second order.

Consider any dynamical system formed of N particles. Suppose that, at any instant of time t, the kinematic state of the system is characterized by the set of quantities u_ν, $\dot{u}_\nu$, $\ddot{u}_\nu$, ..., $u_\nu^{(n)}$, where u_ν typifies any one of the three rectangular coordinates of any particle of mass m_ν; let the external force acting on the particle m_ν have component U_ν corresponding to u_ν. For ideal constraints the Mangeron principle [3] leads to the general equation of dynamics

$$(m_{(\nu)}\, u_\nu - U_\nu)\, u_\nu^{(n)} = 0, \tag{1}$$

provided that

$$\delta t = 0, \qquad \delta u_\nu = \delta \dot{u}_\nu = \delta \ddot{u}_\nu = \ldots = \delta u_\nu^{(n-1)} = 0, \qquad \delta u_\nu^{(n)} \neq 0. \tag{2}$$

Here summation over a repeated suffix is understood while a parenthesis about a repeated suffix indicates that no additional summation is to be performed; the ranges of the various suffixes will be

$$\nu = 1, 2, \ldots, 3N; \quad p, q, s = 1, 2, \ldots, m; \quad l = 1, 2, \ldots, r < m;$$

$$i = r+1, \ldots, m; \quad k, n = 1, 2, \ldots.$$

The general equation (1), together with conditions (2), is the basis of a form in which we propose to write the generalised Mangeron-Deleanu equations describing the motion of a nonholonomic system in the presence of non-integrable differential equations of order n:

$$A_{lp}(t, x_q, \dot{x}_q, \ldots, x_q^{(n-1)})\, x_p^{(n)} + A_l(t, x_q, \dot{x}_q, \ldots, x_q^{(n-1)}) = 0, \tag{3}$$

where $x_1, x_2, \ldots, x_m$ are the Poincaré-Cetaev variables which determine the position of the system at time t.

2. The General Equation of Dynamics

We start by translating the general equation (1) from the language of u_ν to the language of x_p by means of the transformation equations:

$$u_\nu = u_\nu(t, x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

As explained in [7], let the system be freed from all nonholonomic constraints: and let $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ be the parameters of real (possible) displacement with coresponding infinitesimal displacement operators $X_0, X_1, \ldots, X_m$, so that the change $\mathrm{d}f(\delta f)$ in a function $f(t, x_1, \ldots, x_m)$ in real (possible) displacement of the system is given by

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}t\{X_0 + \eta_{1p} X_p\} f \quad (\delta f = \omega_p X_p f). \tag{4}$$

Moreover, the commutation relations

$$(X_0, X_p) = C_{0pq} X_q, \quad (X_p, X_q) = C_{pqs} X_s \tag{5}$$

serve to define the C_{0pq}, C_{pqs} as functions of the x' s and t. From (4) and (5) it follows that

$$u_\nu = (X_0 + \eta_{1p} X_p) u_\nu; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u_\nu^{(n)} = {} & \eta_p^{(n-1)} X_p u_\nu + n\eta_p^{(n-2)} (X_p X_0 + \eta_q X_p X_q) u_\nu + \\ & + (n-1)\eta_p^{(n-2)} (C_{0pq} X_q + C_{qps} \eta_q X_s) u_\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

By means of (4), (6) and (7) we can compute the variations δu_ν, $\delta \dot{u}_\nu$, $\delta \ddot{u}_\nu, \ldots, \delta u_\nu^{(n)}$. Since the order of singularity of the matrix $\| X_p u_\nu \|$ is zero, it follows that in the Poincaré-Cetaev variables the conditions (2) are equivalent to

$$\omega_p = \delta\eta_{1p} = \delta\dot{\eta}_{1p} = \ldots = \delta\eta_{1p}^{(n-2)} = 0 \tag{8}$$

and

$$\delta u_\nu^{(n)} = \delta\eta_{1p}^{(n-1)} X_p u_\nu. \tag{9}$$

Thus, the general equation (1) assumes the form

$$(m_{(\nu)} \ddot{u}_\nu X_p(u_\nu) - Q_p) \delta\eta_{1p}^{(n-1)} = 0, \tag{10}$$

where Q_p denotes the expression $U_\nu X_p u_\nu$ which is the generalised force corresponding to x_p.

It T denotes the kinetic energy $\frac{1}{2} m_{(\nu)} \dot{u}_\nu^2$ of the system without allowance for the nonholonomic constraints, we have

$$\overset{(n)}{T} = m_{(\nu)} \dot{u}_\nu u_\nu^{(n+1)} + n m_{(\nu)} \ddot{u}_\nu u_\nu^{(n)} + \ldots.$$

In view of (7) it follows that

$$\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \eta_{i_\nu}^{(n-1)}} = m_{(\nu)} u \frac{\partial u_\nu^{(n+1)}}{\partial \eta_{i_p}^{(n-1)}} + n m_{(\nu)} \ddot{u} \frac{\partial u_\nu^{(n)}}{\partial \eta_{i_p}^{(n-1)}}. \tag{11}$$

But from (6) and (7) we have

$$\frac{\partial \dot{u}_\nu}{\partial \eta_{i_p}} = \frac{\partial \ddot{u}_\nu}{\partial \dot{\eta}_{i_p}} = \ldots = \frac{\partial u_\nu^{(n)}}{\partial \eta_{i_p}^{(n-1)}} = X_p u_\nu$$

and

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \eta_{i_p}^{(n-2)}} = n X_p \dot{u}_\nu + (n-1)(C_{0pq} X_q + C_{qps} \eta_{iq} X_s) u_\nu.$$

Substituting from the last relations in (11), we get

$$m_{(\nu)} u_\nu X_p u_\nu = Z_p - P_p \tag{12}$$

where

$$Z_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \eta_{i_p}^{(n-1)}} - (n+1) X_p(T) \right), \qquad P_p = C_{0pq} \frac{\partial T}{\partial \eta_{i_q}} + C_{qps} \eta_{iq} \frac{\partial T}{\partial \eta_{i_s}}.$$

By virtue of (12), the equation (10) becomes

$$\{Z_p - P_p - Q_p\} \delta \eta_{i_p}^{(n-1)} = 0, \tag{13}$$

and this is the desired transformation of the general equation (1).

3. Equations of Motion

When the motion of the system is restricted by the presence of constraint equations (3), we use formula (4) to obtain expressions for the $\dot{x}_q, \ddot{x}_q, \ldots, x_q^{(n)}$ in terms of t, x', η' and various order derivatives of η' with respect to the time. Substituting these expressions in (3), the equations of nonholonomic costraints can be written in the form

$$a_{lp}(t, x_q, \eta_{iq}, \dot{\eta}_{iq}, \ldots, \eta_{iq}^{(n-2)})\, \eta_{i_p}^{(n-1)} + a_l(t, x_q, \eta_{iq}, \dot{\eta}_{iq}, \ldots, \eta_{iq}^{(n-2)}) = 0. \tag{14}$$

Taking variations in accordance with (8), we have

$$a_{lp}(t, x_q, \eta_{iq}, \dot{\eta}_{iq}, \ldots, \eta_{iq}^{(n-2)})\, \delta \eta_{i_p}^{(n-1)} = 0. \tag{15}$$

Employing the Lagrange λ-method with multipliers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, the equations (13) and (15) lead to the equations of motion

$$Z_p - P_p = Q_p + \lambda_l a_{lp}. \tag{16}$$

These are the generalised Mangeron-Deleanu equations with Lagrange's multipliers, which describe the motion of a nonholonomic system subject to constraints of the form (14).

When the constraint equations (14) are solved to yield

$$\eta_l^{(n-1)} = b_{li}(t, x_q, \eta_q, \ldots, \eta_q^{(n-2)})\eta_i^{(n-1)} + b_l(t, x_q, \eta_q, \ldots, \eta_q^{(n-2)}),$$

the equations (16) give

$$Z_l - P_l = Q_l + \lambda_l, \quad Z_i - P_i = Q_i - \lambda_l b_{li}. \tag{17}$$

Eliminating λ_l, the generalised Mangeron-Deleanu equations are

$$(Z_i - P_i - Q_i) + b_{li}(Z_l - P_l - Q_l) = 0, \tag{18}$$

which include as a special case the equations obtained in [8].

For holonomic systems with m degrees of freedom, the equations (16) simplify to assume the form

$$Z_p - P_p = Q_p. \tag{19}$$

Again, from (11) we deduce the identity

$$X_p(T) = \frac{1}{n-k}\left(n\frac{\partial^{(k)}T}{\partial\eta_p^{(k-1)}} - k\frac{\partial^{(n)}T}{\partial\eta_p^{(n-1)}}\right) \qquad (k \neq n),$$

which generalises the result given in [9]. In view of this identity, the equations (19) for the motion of holonomic systems can be written in the form

$$\frac{1}{n-k}\left((k+1)\frac{\partial^{(n)}T}{\partial\eta_p^{(n-1)}} - (n+1)\frac{\partial^{(k)}T}{\partial\eta_p^{(k-1)}}\right) - P_p = Q_p \qquad (k \neq n). \tag{20}$$

If the x's are the Lagrangian coordinates and η's are $\dot{x}$'s, all the C_{0pq} C_{qps} and P_p vanish. In this case equations (19) become the customary Mangeron-Deleanu equations [9] embodying the Nielsen equations [11] for $n = 1$ and Tzenov's equations [1] for $n = 2$; moreover, the equations (20) are identical with the equations mentioned in [2]. For nonholonomic systems described in the Lagrangian coordinates, equations (17) are identical with the equations obtained by Maslov [10] and equations (18) agree with those given in [4], [10].

Examples. As an application of equations (16), we consider the motion of two particles, each of unit mass, connected by a light rigid rod of length l, the system being constrained to move in the vertical plane in such a manner that the acceleration of the midpoint of the rod is directed along it.

In this example which is discussed in [5], we introduce the rectangular coordinates x, y of the centre of the rod and the angle φ formed by the rod with the horizontal x-axis. The nonholonomic constraint is expressed by the equation

$$-\ddot{x}\sin\varphi + \ddot{y}\cos\varphi = 0,$$

showing that the system is nonholonomic and of order two.

Let us choose

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad y_3 = \varphi,$$

(21) $$\eta_1 = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi, \qquad \eta_2 = -\dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi, \qquad \eta_3 = \dot{\varphi}.$$

Then

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_1 = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = -\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

and $C_{231} = -C_{321} = C_{312} = -C_{132} = 1$, all other C's being zero. Moreover, the constraint equation becomes

(22) $$\dot{\eta}_1 - \eta_2\eta_3 = 0.$$

Now

$$T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \frac{l^2}{4}\eta_3^2,$$

$$\ddot{T} = 2\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\eta}_3^2 + \ldots\right),$$

and $Q_1 = -2g\cos\varphi$, $Q_2 = 2g\sin\varphi$, $Q_3 = 0$.

Taking $n = 2$ in equations (16), we have the equations of motion with multiplier λ

$$2(\dot{\eta}_1 - \eta_2\eta_3) = \lambda - 2g\cos\varphi, \qquad \dot{\eta}_2 + \eta_2\eta_1 = g\sin\varphi, \qquad \dot{\eta}_3 = 0.$$

In view of (22), the last equations yield with arbitrary constants A, B, α_1:

$$\lambda = 2g\cos\varphi,$$

$$\eta_1 = A\sin\varphi - B\cos\varphi - \frac{g}{2\alpha_1}\varphi\cos\varphi + \frac{g}{\alpha_1}\sin\varphi,$$

$$\eta_2 = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{g}{2\alpha_1}\varphi\sin\varphi,$$

$$\eta_3 = \alpha_1.$$

From (21) we have

$$\dot{x} = -\eta_1\sin\varphi - \eta_2\cos\varphi, \quad \dot{y} = \eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi.$$

Inserting the values of η_1 and η_2 and integrating, we get

$$x = \frac{g}{8\alpha_1^2}\sin 2(\alpha_1 t + \alpha_2) + \frac{\alpha_3}{2}t + \alpha_4,$$

$$y = -\frac{g}{4}t^2 - \frac{g}{8\alpha_1^2}\cos 2(\alpha_1 t + \alpha_2) + \frac{\alpha_5}{2}t + \alpha_6,$$

$$\varphi = \alpha_1 t + \alpha_2,$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ are arbitrary constants of integration.

Received October 15, 1975

University of Islamabad,
Islamabad, Pakistan

REFERENCES

1. Tzenov I., *On a new Form of the Equations of Analytic Dynamics* (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, **89**, 21—24 (1953).
2. Djukic D., *On the Generalized form of the Lagrange Equations of the second Kind* (in Russian). Prikl. Mat. Meh., **37**, 156—159 (1973).
3. Dobranravov V. V., *Foundation of Nonholonomic Mechanical Systems* (in Russian). Visa Skola, Moskow (1970).
4. Dolaptchiew B., *Sur les systèmes mécaniques non holonomes assujettis à des liaisons arbitraires*. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 631—634 (1966).
5. Gantmacher F. R., *Lectures on Analytical Dynamics* (in Russian). Fiz. Mat. Lit., Moskow (1960).
6. Ghori Q. K., *Virtual Displacements of Nonholonomic Systems with Arbitrary Constraints*. Z. Angew. Math. Mech., **52**, 123—124 (1972).
7. Ghori Q. K., Hussain M., *Poincaré's Equations for Nonholonomic Dynamical Systems*. Z. Angew. Math. Mech., **53**, 391—396 (1973).
8. Ghori Q. K., Hussain M., *On some Forms of the Eqations of Motion in Poincaré-Četaev Variables*. Z. Angew. Math. Mech. **54**, 495—499 (1974).
9. Mangeron D., Deleanu S., *Sur une classe d'équations de la mécanique analytique au sens de I. Tzenov*. C. R. Acad. Bulgar. Sci., **15**, 9—12 (1962).
10. Maslov Ju. N., *On the Most general Equations of Analytical Dynamics* (in Russian). Taškent Gos. Univ. Naučn. Trudy, *209*, 21—32 (1962).
11. Nielsen J., *Vorlesungen über elementare Mechanik* (deutsch von Fenchel). Springer-Verlag, Berlin, 345—354 (1935).

ECUAŢIILE LUI MANGERON-DELEANU ÎN VARIABILELE LUI POINCARÉ-CETAEV

(Rezumat)

Scopul lucrării constă în studiul grupal-teoretic al mişcării sistemelor neolonome de ordin superior. Bazat pe principiul lui Mangeron, se obţine o generalizare a ecuaţiilor lui Mangeron-Deleanu în variabilele lui Poincaré-Cetaev. Teoria este ilustrată printr-un exemplu de sistem neolonom de ordinul al doilea.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 532.135

NON-NEWTONIAN UNSTEADY FLOW BETWEEN TWO PARALLEL WALLS

BY

S. A. S. MESSIHA and N. A. IBRAHIM

1. Introduction

The two-dimensional flow problem of an incompressible viscous fluid with constant properties between two parallel walls was discussed by Ishigaki [1]. He considered the case of flow which is independent of the distance parallel to the walls and the velocity component normal to the walls is zero. An exact solution is obtained when one wall is at rest and the other moves periodically in time about a constant mean. The solution is subject to two conditions; in the first the wall at rest is kept insulated to heat (adiabatic wall) and in the second the wall is kept at constant temperature (isothermal wall). The results obtained by him illustrate the influence of oscillation through viscous dissipation on the temperature field. He found that when the lower wall temperature is higher than the upper wall temperature, heat flows from the lower wall to the fluid only when the Prandtl number and Eckert number exceed certain values. He found also that the time-mean heat flux or the time-mean temperature of the oscillating wall increases with frequency and is ultimatly proportional to the square root of the frequency. The introduction of a variable suction or the superposition of a magnetic field on the above problem were considered by many authors.

Recently there has been an increasing interest in the flow properties of non-Newtonian fluids specially in technological fields. The introduction of the elastic property of the fluid will play an important roll in modifying the flow field. Such a fluid is known as elastico-viscous fluid, whose constitutive equations are characterized by Walters [2] as liquid B'. Kaloni [3] studied the effect of unsteady fluctuations of the free stream velocity on the flow in the boundary layer of an incompressible elastico-viscous fluid B' past an infinite plane porous wall with constant suction.

In the present work we consider the same problem as in [1] taking into consideration the elastic properties of the fluid.

2. Basic Equations

In case of non-Newtonian elastico-viscous fluids with short relaxation time, the stress tensor is given by

$$\sigma_{ik} = -pg_{ik} + 2\mu_0 e^{(1)ik} - 2k_0 \frac{\delta}{\delta t} e^{(1)ik}, \tag{1}$$

where p is an arbitrary isotropic pressure, g_{ik} — the metric tensor of a fixed coordinate system x_i; μ_0—the limiting viscosity at small rates of shear and is defined by $\mu_0 = \int_0^\infty N(\tau)\,d\tau$; k_0 — the elastic parameter and is defined by $k_0 = \int_0^\infty \tau N(\tau) d\tau$ and is considered to be small, $N(\tau)$ is the distribution function of relaxation times τ and $\frac{\delta}{\delta t}$ is the convected differentiation of a tensor quantity and is defined by

$$\frac{\delta b_{ik}}{\delta t} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial t_m} + v_m \frac{\partial b_{im}}{\partial x} - b_{im}\frac{\partial v_k}{\partial x_m} - b_{mk}\frac{\partial v_i}{\partial x_m}, \tag{2}$$

where b_{ik} is any contravarient tensor and v_i is the velocity vector. Also

$$e^{(1)ik} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right\}. \tag{3}$$

In the special case where the motion is independent of x and the velocity normal to the wall is zero everywhere, the momentum and energy equations take the form

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k_0\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2}, \tag{4}$$

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t} = k'\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - k_0\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}, \tag{5}$$

where u is the velocity parallel to the wall, T— the temperature and $U(t)$ is the velocity of the upper wall. The boundary conditions are such that $u = 0$ at the lower wall, $y = 0$ and $u = U(t)$ at the upper wall $y = h$. The temperature of the upper wall is assumed constant T_m while the lower one is either kept at constant temperature T (isothermal wall) or is insulated to heat (adiabatic wall).

We introduce non-dimensional quantities defined by

$$y' = \frac{y}{h}, \quad t' = \frac{\nu t}{h^2}, \quad \omega' = \frac{\omega h^2}{\nu}, \quad u' = \frac{u}{U_0},$$
$$U' = \frac{U}{U_0}, \qquad k = \frac{k_0}{\rho h'}, \qquad \mathcal{P} = \frac{\nu\rho c}{k'} \tag{6}$$

where $\nu = \mu_0/\rho$ is the kinematic viscosity, ω — the frequency, U_0 —a reference velocity, c — the specific heat, k' — the thermal conductivity and $\mathcal{P}$—the Prandtl number. Substitute in (4) and (5) we get, after dropping the dashes, the equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial y^2} = -\frac{dU}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \mathcal{P}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}U_0^2}{c}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - k\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}\right\} \tag{8}$$

subject to the boundary conditions

$$\begin{cases} \text{at } y=0\text{: } u=0,\ T=T_s \text{ (isothermal wall), or } \dfrac{\partial T}{\partial y}=0 \text{, (adiabatic wall);} \\ \text{at } y=1\text{; } \quad u=U,\quad T=T_m. \end{cases} \tag{9}$$

3. The Velocity Field

We consider the case of periodic motion of the upper wall in the form

$$U(t) = 1 + \frac{1}{2}\in\{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\} \tag{10}$$

so that the velocity may take the form

$$u(y,t) = f_0(y) + \frac{1}{2}\in\{f(y)\,e^{i\omega t} + \bar{f}(y)e^{-i\omega t}\}, \tag{11}$$

where $\bar{f}$ is the conjugate of f.

Substitute from (10) and (11) into (7) and (9) and on comparing harmonic terms we get

$$f_0'' = 0, \quad (1 + i\omega k)f'' - i\omega f = -i\omega \tag{12}$$

subject to the conditions

$$f_0(0) = f(0) = 0, \quad f_0(1) = f(1) = 1, \tag{13}$$

whose solutions are easily obtained in the form

$$f_0 = y, \quad f = 1 - \frac{\sinh S(1-y)}{\sinh S}, \tag{14}$$

where

$$S = \sqrt{\frac{i\omega}{1 - i\omega k}} = S_r + iS_i. \tag{15}$$

The non-dimensional shear stress τ is given by

$$\tau = \frac{\tau' h}{\mu_0 U_0} = \frac{\partial u}{\partial y} - k\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}, \tag{16}$$

the shear stress τ_m at the moving wall is given by

(17) $$\tau_m = 1 + \frac{1}{2} \in \{A\, e^{i\omega t} + \bar{A}\, e^{-i\omega t}\},$$

where

(18) $$A = S(1 - i\omega k) \operatorname{cosech} S$$

and the shear stress τ_s at the stationary wall is

(19) $$\tau_s = 1 + \frac{1}{2} \in \{Be^{i\omega t} + \bar{B}e^{-i\omega t}\},$$

where

(20) $$B = S(1 - i\omega k)\coth S$$

and the shear stress at any layer is

(21) $$\tau = 1 + \frac{1}{2} \in \{Ce^{i\omega t} + \bar{C}e^{-i\omega t}\},$$

where

(22) $$C = A \cosh S(1 - y).$$

Fig. 1 shows that the amplitude $|A|$ of the shear stress fluctuations increases with increasing the elastic parameter k. Fig. 2 shows that the amplitude $|B|$ of the shear stress fluctuations at the stationary wall

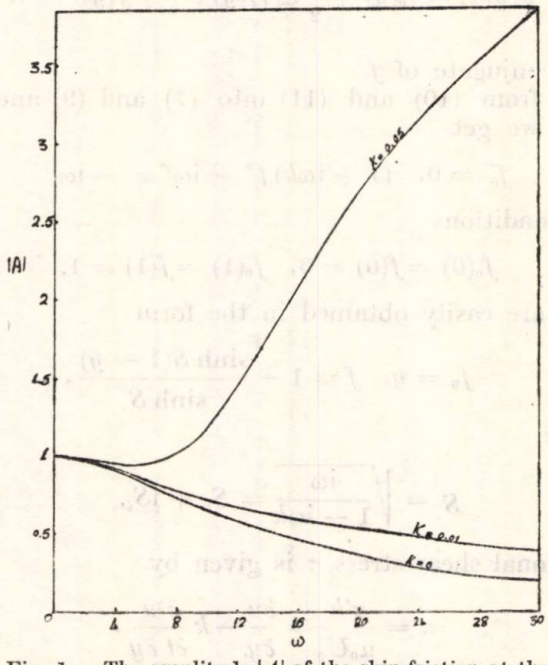

Fig. 1 — The amplitude $|A|$ of the skin-friction at the moving wall against ω; $k = 0,\ 0.01,\ 0.05$.

decreases with increasing k for small values of the frequency parameter ω and increases for large ω. Fig. 3 shows that the shear stress τ increases as ω increases for all values of k. It also increases as k increases at all layers between the two walls.

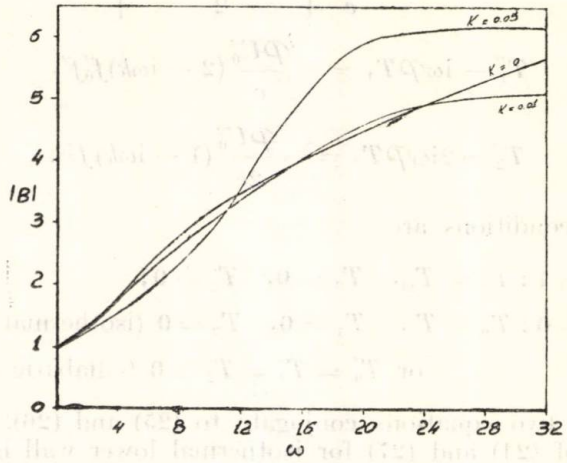

Fig. 2 — The amplitude $|B|$ of the skin-friction at the stationary wall against ω; $k = 0,\ 0.01,\ 0.05$.

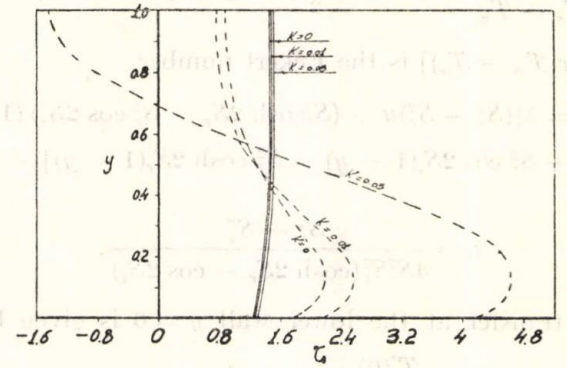

Fig. 3 — The shear stress τ_1 against y for $\omega t = \pi/6$, $\in = 0{,}5$. $k = 0,\ 0.01,\ 0.05$, ——— $\omega = 4$, ----- $\omega = 32$.

4. The Temperature Field

We assume a solution of the energy equation (8) in the form

$$T(y,t) = T_0(y) + \frac{1}{2}\in\{T_1(y)e^{i\omega t} + \bar{T}_1(y)e^{-i\omega t}\} + \tag{23}$$
$$+ \frac{1}{2}\in^2\{T_2(y)e^{2i\omega t} + \bar{T}_2(y)e^{-2i\omega t}\},$$

where the bar denotes conjugate quantities.

Substitute from (23) into (8), equating harmonic coefficients, we get the equations

$$T_0'' = -\frac{\mathcal{P}U_0^2}{c}\left\{f_0'^2 + \frac{1}{2}\in^2 f'\bar{f}'\right\}, \tag{24}$$

$$T_1'' - i\omega\mathcal{P}T_1 = -\frac{\mathcal{P}U_0^2}{c}(2 - i\omega k)f_0'f', \tag{25}$$

$$T_2'' - 2i\omega\mathcal{P}T_2 = -\frac{\mathcal{P}U_0^2}{2c}(1 - i\omega k)f'^2. \tag{26}$$

The boundary conditions are

$$\begin{cases} \text{at } y = 1 : T_0 = T_m, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0; \\ \text{at } y = 0 : T_0 = T_s, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0 \text{ (isothermal wall)} \\ \qquad\qquad\qquad \text{or } T_0' = T_1' = T_2' = 0 \text{ (adiabàtic wall).} \end{cases} \tag{27}$$

There are two equations conjugate to (25) and (26).
Solution of (24) and (27) for isothermal lower wall is

$$\frac{T_0 - T_m}{T_s - T_m} = 1 - y + \frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{E}\{y - y^2 + \in^2 G(y)\}, \tag{28}$$

where $E = U_0^2/[c(T_m - T_s)]$ is the Eckert number,

$$\begin{aligned} G(y) = \lambda[(S_i^2 - S_r^2)y + (S_i^2\cosh 2S_r - S_r^2\cos 2S_i)(1 - y) + \\ + S_r^2\cos 2S_i(1 - y) - S_i^2\cosh 2S_r(1 - y)] \end{aligned} \tag{29}$$

and

$$\lambda = \frac{S_r^2 + S_i^2}{4S_r^2S_i^2(\cosh 2S_r - \cos 2S_i)}. \tag{30}$$

The heat transfer at the lower wall $y = 0$ is given by

$$q_0 = -\frac{T_0'(0)}{T_s - T_m} = 1 - \frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{E}\{1 + \in^2 D(\omega)\}, \tag{31}$$

where

$$\begin{aligned} D(\omega) = \lambda\{S_i^2 - S_r^2 + S_r^2\cos 2S_i - S_i^2\cosh 2S_r + \\ + 2S_iS_r(S_r\sin 2S_i + S_i\sinh 2S_r)\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Solution of (24) and (27) for adiabatic lower wall is given by

$$\begin{aligned} T_0 - T_m = \frac{\mathcal{P}U_0^2}{2c}[1 - y^2 + \in^2\lambda\{S_i^2 - S_r^2 + S_r^2\cos 2S_i(1 - y) - \\ - S_i^2\cosh 2S_r(1 - y) + 2S_iS_r(S_i\sinh 2S_r + S_r\sin 2S_i)(1 - y)\}]. \end{aligned} \tag{33}$$

The wall temperature in this case is

$$T_0(0) = T_m + \frac{\mathcal{P}U_0^2}{2c}\{1 + \in^2 D(\omega)\}. \tag{34}$$

Fig. 4 shows that the temperature for isothermal lower wall increases as k increases for all values of ω. Fig. 5 shows that the heat transfer at the lower wall is negative for small ω and increases with increasing k. Fig. 6

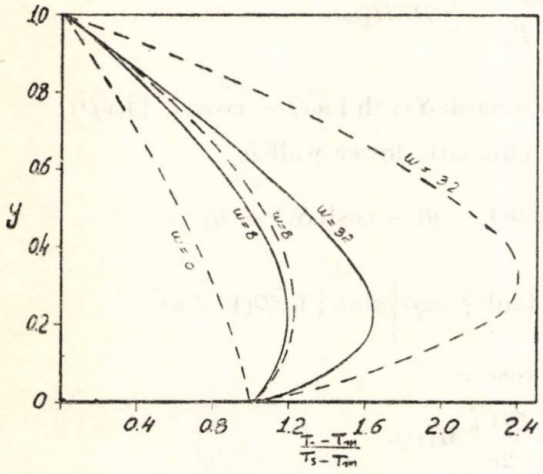

Fig. 4 — The temperature for isothermal lower wall against y for $\mathcal{P}\mathcal{E} = 1$, $\omega = 0, 8, 32, \in = 2$, ——— $k = 0$, ----- $k = 0.05$.

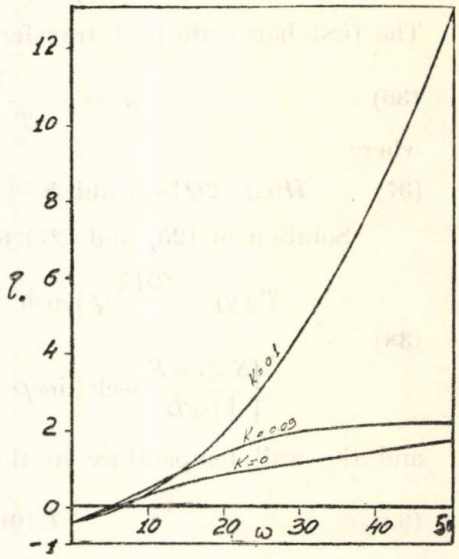

Fig. 5 — The heat transfer q_0 at the lower wall against ω for $\mathcal{P}\mathcal{E} = 1, \in = 1$, $k = 0$, 0.05, 0.1.

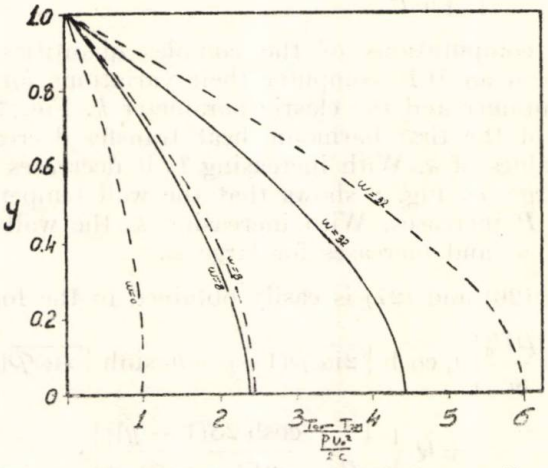

Fig. 6 — The temperature for adiabatic lower wall against y for $\in = 1$, $\omega = 0, 8, 32$, $k = 0$, ----- $k = 0.05$.

shows that the temperature for adiabatic lower wall increases as k increases at all layers.

Solution of (25) and (27) for isothermal lower wall is

$$T_1(y) = \frac{\mathcal{P}U_0^2}{c} Q \{\cosh \sqrt{i\omega P}(1 - y) - \cosh S(1 - y) + \tag{35}$$

$$+ (\cosh S \operatorname{cosech} \sqrt{i\omega\mathcal{P}} - \coth \sqrt{i\omega\mathcal{P}}) \sinh \sqrt{i\omega\mathcal{P}}(1 - y)\}.$$

The first harmonic heat transfer at the lower wall is

$$q_1 = - \frac{T_1'0)}{T_s - T_m} = \frac{1}{2} \mathcal{P}\mathcal{L}H(\omega), \tag{36}$$

where

$$H(\omega)=2Q\{-S \sinh S+\sqrt{i\omega\mathcal{P}} (\cosh S \coth \sqrt{i\omega\mathcal{P}}- \operatorname{cosech} \sqrt{i\omega\mathcal{P}})\}. \tag{37}$$

Solution of (25) and (27) for adiabatic lower wall is

$$T_1(y) = \frac{\mathcal{P}U_0^2}{c} Q [\cosh \sqrt{i\omega\mathcal{P}}(1 - y) - \cosh S(1 - y) + \tag{38}$$

$$+ \left\{\frac{S \sinh S}{\sqrt{i\omega\mathcal{P}}} \operatorname{sech} \sqrt{i\omega\mathcal{P}} - \tanh \sqrt{i\omega\mathcal{P}}\right\} \sinh \sqrt{i\omega\mathcal{P}}(1 - y)$$

and the wall temperature in this case is

$$T_1(0) = \frac{\mathcal{P}U_0^2}{2c} M(\omega), \tag{39}$$

where

$$M(\omega) = 2Q\left[\frac{S \sinh S}{\sqrt{i\omega P}} \tanh \sqrt{i\omega\mathcal{P}} - \cosh S + \operatorname{sech} \sqrt{i\omega\mathcal{P}}\right]. \tag{40}$$

Numerical computations of the complex quantities $H(\omega)$ and $M(\omega)$ have been done on an ICL computer their variations for different values of the Prandtl number and the elastic parameter k. Fig. 7 shows that the amplitude $|H|$ of the first harmonic heat transfer decreases with increasing P for all values of k. With increasing k, it decreases for small ω and increases for large ω. Fig. 8 shows that the wall temperature amplitude M decreases as P increases. With increasing k, the wall temperature decreases for small ω and increases for large ω.

Solution of (26) and (27) is easily obtained in the form

$$T_2(y)_i^n = \frac{\mathcal{P}U_0^2}{8c}\Big[a_1 \cosh \sqrt{2i\omega\mathcal{P}}(1-y)+b_1 \sinh \sqrt{2i\omega\mathcal{P}}(1-y)+ \tag{41}$$

$$+ Q_1\left\{\frac{1}{i\omega P} - \frac{\cosh 2S(1 - y)}{2S^2 - i\omega\mathcal{P}}\right\}\Big],$$

where

$$a_1 = Q_1\left\{\frac{1}{2S^2 - i\omega\mathcal{P}} - \frac{1}{i\omega\mathcal{P}}\right\},$$

$$b_1 = Q_1 \operatorname{cosech}\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}\left[\frac{\cosh 2S - \cosh\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}}{(2S^2 - iP)} + \frac{\cosh\sqrt{2i\omega\mathcal{P}} - 1}{i\omega\mathcal{P}}\right],$$

for isothermal lower wall, or

$$b_1 = Q_1 \operatorname{sech}\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}\left[\frac{2S\sinh 2S}{(2S^2 - i\omega P)\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}} - \frac{\sinh\sqrt{2i\omega P}}{2S^2 - i\omega\mathcal{P}} + \frac{\sinh\sqrt{2i\omega P}}{i\omega P}\right]$$

for adiabatic lower wall.

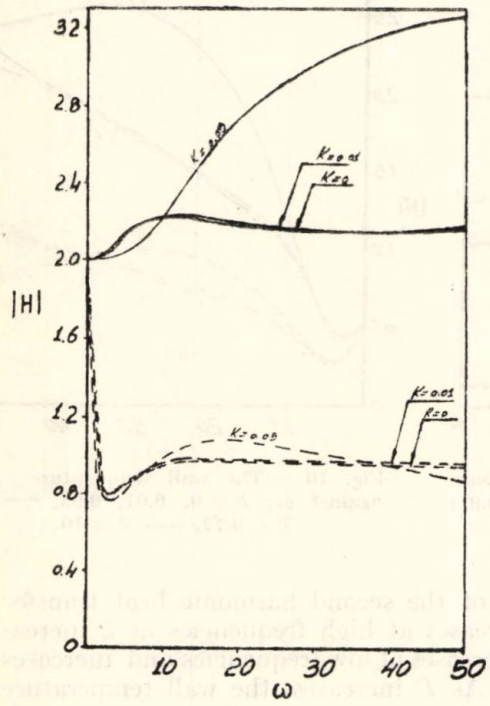

Fig. 7 — The amplitude of first harmonic heat transfer fluctuation against ω for $k = 0$, 0.01, 0.05, ——— $\mathcal{P} = 0.72$, ----- $\mathcal{P} = 10$.

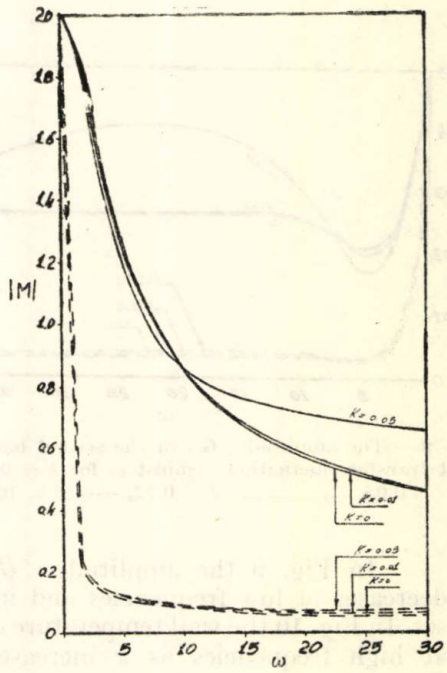

Fig. 8 — The wall temperature amplitude $|M|$ against ω, $k = 0$, 0.01, 0.01, ——— $\mathcal{P} = 0.72$, ----- $\mathcal{P} = 10$.

The second harmonic heat transfer at the lower wall in the isothermal case is

$$q_2 = -\frac{T_2'(0)}{T_s - T_m} = \frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{E}G(\omega), \tag{42}$$

where

$$(43)\quad G(\omega)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}\,\{a_1\sinh\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}+b_1\cosh\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}\}-\frac{2SQ_1\sinh 2S}{2S^2-i\omega\mathcal{P}}\right]$$

and the wall temperature in the adiabatic case is

$$(44)\quad T_2(0)=\frac{\mathcal{P}U_0^2}{2c}N(\omega),$$

where

$$(45)\quad N(\omega)=\frac{1}{4}\left[a_1\cosh\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}+b_1\sinh\sqrt{2i\omega\mathcal{P}}+Q_1\left\{\frac{1}{i\omega\mathcal{P}}-\frac{\cosh 2S}{2S^2-i\omega\mathcal{P}}\right\}\right].$$

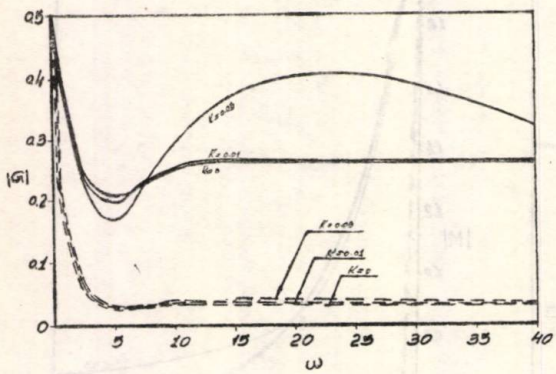

Fig. 9 — The amplitude $|G|$ of the second harmonic heat transfer fluctuation against ω for $k = 0$, 0.01, 0.05, ———— $\mathcal{P} = 0.72$, ----- $\mathcal{P} = 10$.

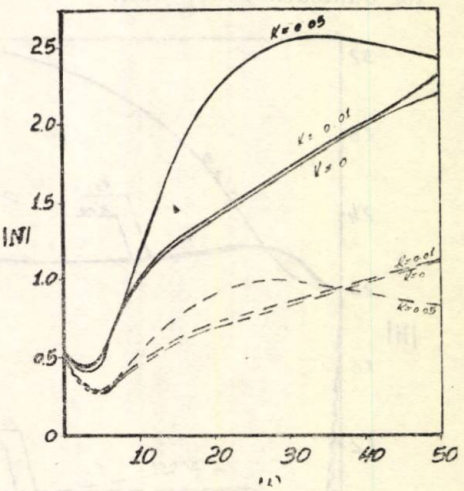

Fig. 10 — The wall temperature $|N|$ against ω; $k = 0$, 0.01, 0.05, ———— $\mathcal{P} = 0.72$, ----- $\mathcal{P} = 10$.

In Fig. 9 the amplitude $|G|$ of the second harmonic heat transfer decreases at low frequencies and increases at high frequencies as k increases. In Fig. 10 the wall temperature decreases at low frequencies and increases at high frequencies as k increases. As P increases, the wall temperature decreases.

5. Conclusions

1. Exact solutions are obtained for the velocity and temperature of the two-dimensional elastico-viscous fluid flow between two parallel walls, one of which is fixed while the other moves periodically about a constant mean.

2. Two cases are considered ; (i) the fixed wall has a constant temperature (isothermal wall), (ii) the fixed wall is insulated to heat (adiabatic wall). The moving wall is kept at a constant temperature in both cases.

3. It is found that the skin-friction fluctuations at the moving wall increases while that at the stationary wall decreases as the elastic parameter k increases.

4. The steady mean temperature as well as the heat transfer increases with increasing k. The first and second harmonic heat transfer at the stationary wall decreases at small values of the frequency parameter ω and increases at large ω as k increases.

5. The wall temperature in case of adiabatic lower wall decreases as Prandtl number $\mathcal{P}$ increases.

Received 19 September 1975

Assiout University, Assiout and Ain-Shams University, Cairo, Egypt

REFERENCES

1. Ishigaki H., J. Fluid. Mech., **50**, 657 (1971).
2. Walters K., Beard D. W., Proc. Camb. Phil. Soc., **60**, 667 (1964).
3. Kaloni P. N., Phys. Fluids, **10**, 344 (1967).
4. Frater K. R., ZAMP, **20**, 712 (1969).

CURGEREA NEPERMANENTĂ A UNUI FLUID NENEWTONIAN ÎNTRE DOI PEREŢI PARALELI

(Rezumat)

Se obţin soluţii exacte pentru cîmpurile de viteză şi de temperatură pentru curgerea bi-dimensională a unui fluid elasto-vîscos printre doi pereţi paraleli, unul fix şi celălalt în mişcare periodică în jurul unei poziţii medii fixe. Se consideră două cazuri : a) peretele fix are temperatură constantă ; b) peretele fix este izolat termic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 339.377

ON SOME THEOREMS IN A GENERALIZED THEORY OF LINEAR MICROPOLAR THERMOELASTICITY

BY

ELISABETA RUSU

1. Introduction

A. E. Green and K. A. Lindsay [1] have given a generalized theory of classical thermoelasticity using an entropy production inequality proposed by Green and Laws [2]. The linear theory and a uniqueness theorem was also presented in [1].

Some theorems—the reciprocity theorem, a variational theorem—for the generalized theory of linear thermoelasticity have been given in [3].

E. Boschi and D. Ieşan [4] generalize the linear theory of thermoelasticity established in [1] to homogeneous micropolar continua.

Some theorems in the linear theory of micropolar thermoelasticitiy are given in [5]—[8].

In this paper a uniqueness theorem, a reciprocity theorem and a variational theorem are derived for the generalized theory of linear micropolar thermoelasticity. The reciprocity theorem is obtained without using the Laplace transform, in a form which leads to a variational theorem of Gurtin type [9], using the method given by D. Ieşan [6], extending the results from [3], [7].

2. Basic Equations

Let V be a regular (in sense of Kellog) region of the space occupied by considered medium whose boundary is Σ.

The basic equations for the generalized theory of linear micropolar thermoelasticity are [4]:

i) The equations of motion:

$$t_{ji,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \tag{1.1}$$

$$m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + \rho M_i = I_{ij} \ddot{\varphi}_j. \tag{1.2}$$

ii) The equation of entropy :

$$\theta_0 \rho \dot{\eta} + q_{i,i} = \rho r. \tag{1.3}$$

iii) The constitutive equations :

$$\begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijkl}\, e_{kl} + B_{ijkl}\, \varkappa_{kl} + a_{ij}(\theta + \alpha\dot{\theta}). \\ m_{ij} &= B_{klji}\, e_{kl} + C_{ijkl}\, \varkappa_{kl} + c_{ij}(\theta + \alpha\dot{\theta}). \\ \rho\eta - a &= d\theta + h\dot{\theta} - a_{ij} e_{ij} - c_{ij}\varkappa_{ij}, \\ q_i &= -\theta_0 k_{ij}\theta_{,j}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

iv) The geometrical equations :

$$e_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\varphi_k\,, \qquad \varkappa_{ij} = \varphi_{j,i} \tag{1.5}$$

and we suppose that the initial body is homogeneous and that it has a centre of symmetry at each point — that is meaning the b_i vanishes [1], [4].

The notations are : u_i — the components of displacement vector, φ_i — the microrotation vector, t_{ij} — the stress tensor, m_{ij} — the couple stress tensor, $F_i(M_i)$ are the specific externally applied body force (couple), r is the externally supplied specific heat, η is the specific entropy, q_i — the components of heat flux vector, e_{ij}, $\varkappa_{ij}$ — kinematic characteristics of strain, θ — temperature measured from the absolute reference temperature θ_0, and ρ, I_{ij}, A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}, a_{ij}, c_{ij}, a, d, h, k_{ij}, characteristics constants of the material, which must satisfy the simmetry conditions :

$$A_{ijkl} = A_{klij}, \quad C_{ijkl} = C_{klij}, \quad I_{ij} = I_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}. \tag{1.6}$$

It is also known [1], [4] that

$$(\alpha d - h)\dot{\theta}^2 + k_{ij}\,\theta_{,i}\,\theta_{,j} \geqslant 0. \qquad \alpha d - h \geqslant 0, \quad \alpha > 0, \quad d > 0 \tag{1.7}$$

and it follows $h > 0$.

To the system of field equations we adjoin the initial conditions

$$\begin{aligned} &u_i(x, 0) = a_i, \quad \dot{u}_i(x, 0) = b_i, \quad \varphi_i(x,0) = c_i, \\ &\dot{\varphi}_i(x, 0) = d_i, \quad \theta(x, 0) = 0\,, \quad \eta(x, 0) = \eta_0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

and the boundary conditions

$$\begin{aligned} &u_i = \tilde{u}_i \text{ on } \Sigma_1 \times [0, \infty)\,; \quad \varphi_i = \tilde{\varphi}_i \text{ on } \Sigma_3 \times [0, \infty)\,; \\ &\theta = \tilde{\theta} \text{ on } \Sigma_5 \times [0,\infty); \quad t_i = t_{ji} n_j = \tilde{t}_i \text{ on } \Sigma_2 \times [0, \infty)\,; \\ &m_i = m_{ji} n_j = \tilde{m}_i \text{ on } \Sigma_4 \times [0, \infty)\,; \quad q = q_i n_i = \tilde{q} \text{ on } \Sigma_6 \times [0, \infty), \end{aligned} \tag{1.9}$$

where a_i, b_i, c_i, d_i, η_0, $\tilde{u}_i$, $\tilde{t}_i$, $\tilde{m}_i$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}_i$, $\tilde{q}$ are prescribed functions, n_i are the components of the unit outward normal to Σ and Σ_p $(p = 1, 2, \ldots 6)$ denotes subsets of Σ such that $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma_3 \cup \Sigma_4 = \Sigma_5 \cup \Sigma_6 = \Sigma$, and $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \Sigma_5 \cap \Sigma_6 = \varnothing$.

By a solution of mixed problem we mean the functions u_i, φ_i, θ defined on $V\times[0, \infty)$ with the following properties:

$$u_i \in C^{1,2}, \quad \varphi_i \in C^{1,2}, \quad \theta \in C^{1,2},$$

where by $C^{m,n}$ we mean the notation from [9], which satisfy the field equations (1.1)—(1.5), the initial conditions (1,8) and the boundary conditions (1.9).

3. Uniqueness Theorem

We form the scalar product of $(1.4)_1$, $(1.4)_2$, $(1.4)_3$ and the functions $\dot{u}_i$, $\dot{\varphi}_i$, $\theta + \alpha\dot{\theta}$ respectively, we adding up the obtained relations and integrate over V. By using the relations (1.1), (1.2), (1.5) and (1.9) we get:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left[\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + \frac{1}{2}I_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j + \frac{1}{2}A_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + B_{ijkl}\varkappa_{kl}\varkappa_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varkappa_{kl}\varkappa_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} + \frac{1}{2}\alpha(\alpha d - h)\frac{\theta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{h}{\alpha}(\theta + \alpha\dot{\theta})^2\right]\mathrm{d}x + \int_V[(\alpha d - h)\dot{\theta}^2 +$$

$$+k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}]\,\mathrm{d}x = \int_\Sigma\left[t_{ji}n_j\dot{u}_i + m_{ji}n_j\dot{\varphi}_i - \frac{1}{\theta_0}q_in_i(\theta + \alpha\dot{\theta})\right]\mathrm{d}x + \tag{2.1}$$

$$+\int_V\left[\rho F_i\dot{u}_i + \rho M_i\dot{\varphi}_i + \rho\frac{r}{\theta_0}(\theta + \alpha\dot{\theta})\right]\mathrm{d}x.$$

In order to obtain the uniqueness theorem, let us denote again u_i, φ_i, θ, the differences between two solutions to the started problem $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $\varphi_i = \varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}$, $\theta = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$.

According to the linearity of problem, the differences considered satisfy the basic equations and the initial conditions and the boundary conditions in their homogeneous form.

From (2.1) we get:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\int_V\left[\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + I_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j + A_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + 2B_{ijkl}\varkappa_{kl}e_{ij} + C_{ijkl}\varkappa_{kl}\varkappa_{ij} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} + \alpha(\alpha d - h)\frac{\theta^2}{\alpha^2} + \frac{h}{\alpha}(\theta + \alpha\dot{\theta})^2\right]\mathrm{d}x\right\} = \tag{2.2}$$

$$= -\int_V[(\alpha d - h)\dot{\theta}^2 + k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}]\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

From (2.2) by the standard arguments [7], [11] we obtain:

Theorem 2.1. *The mixed problem of generalized theory of the linear micropolar thermoelasticity formulate in Sect.* **1**, *admits at most one solution.*

3.1. The Reciprocity Theorem

We will denote by l, g the functions defined on $V\times(0, \infty)$ by $l(t) = l$, $g(t) = t$ and f_i, m_i, W be the functions defined on $\bar{V}\times[0, \infty)$ by

$$\rho f_i = g * \rho F_i + \rho(tb_i + a_i), \quad \rho m_i = g * \rho M_i + \rho(td_i + c_i),$$
$$W = \frac{1}{\theta^0} l * \rho r + \rho\eta_0 - a. \tag{3.1}$$

Theorem 3.1. *The functions* u_i, φ_i, q_i, η, t_{ij}, m_{ij} *satisfies the equations* (1.1)—(1.3) *and the initial conditions* (1.8) *if and only if*

$$g * t_{ji,j} + \rho f_i = u_i, \quad g * (m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk}) + \rho m_i = I_{ij}\varphi_j,$$
$$\rho\eta - a + \frac{1}{\theta_0} l * q_{i,i} = W. \tag{3.2}$$

Now, we will derive the reciprocity theorem using the method given in [6]. Let us consider the body subject to two different systems of thermoelastic loadings :

$$L^\nu = \{\rho F_i^\nu, \rho M_i^\nu, \rho r^\nu, \tilde{u}_i^\nu, \tilde{t}_i^\nu, \tilde{\varphi}_i^\nu, \tilde{m}_i^\nu, \tilde{q}^\nu, \tilde{\theta}^\nu, a_i^\nu, b_i^\nu, c_i^\nu, d_i^\nu, \rho\eta_0^\nu\}, \quad (\nu = 1, 2) \tag{3.3}$$

and the two corresponding thermoelastic configurations :

$$C^\nu = \{u_i^\nu, \varphi_i^\nu, \theta^\nu\}, \ (\nu = 1, 2). \tag{3.4}$$

We introduce the notations

$$\rho f_i^\nu = g * \rho F_i^\nu + \rho(tb_i^\nu + a_i^\nu), \quad \rho m_i^\nu = g * \rho M_i^\nu + \rho(td_i^\nu + c_i^\nu),$$
$$W^\nu = \frac{1}{\theta_0} l * \rho r^\nu + \rho\eta_0^\nu - a. \tag{3.5}$$

Theorem 3.2. *If a thermoelastic solid is subject to two different systems of thermoelastic loadings* L^ν, *then between the corresponding thermoelastic configurations* C^ν $(\nu = 1, 2)$ *there is the following reciprocity relation* :

$$\int_V [\rho f_i^1 * u_i^2 - l * (l * W^1 + \alpha W^1) * \theta^2 + \rho m_i^1 * \varphi_i^2]\, dx +$$
$$+ \int_\Sigma g * \left[t_i^1 * u_i^2 + m_i^1 * \varphi_i^2 + \frac{1}{\theta_0}(l * q^1 + \alpha q^1) * \theta^2\right] dx =$$
$$= \int_V [\rho f_i^2 * u_i^1 - l * (l * W^2 + \alpha W^2) * \theta^1 + \rho m_i^2 * \varphi_i^1]\, dx +$$
$$+ \int_\Sigma g * \left[t_i^2 * u_i^1 + m_i^2 * \varphi_i^1 - \frac{1}{\theta_0}(l * q^2 + \alpha q^2) * \theta^1\right] dx. \tag{3.6}$$

The proof of this theorem is like in [6], [3] and we don't give it here.

4. Variational Principle

Now, we will derive a variational principle. In this end we will write the reciprocity theorem in another form. We introduce the vectors :

$$U = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta), \quad F = (\rho f_1, \rho f_2, \rho f_3, \rho m_1, \rho m_2, \rho m_3, \rho f_4) \tag{4.1}$$

where ρf_i and ρm_i $(i = 1, 2, 3)$ are (3.1) and $f_4 = -g * W - l * \alpha W$.

Theorem 4.1. *The functions* u_i, φ_i, θ *satisfy the equations* (3.2) *if and only if*

$$AU = F, \tag{4.2}$$

where

$$\begin{aligned} A_i U &= -g * [A_{jkl} e_{kl} + B_{jkl} \varkappa_{kl} + a_{ji}(\theta + \alpha\dot{\theta})]_{,j} + \rho u_i, \\ A_{i+3} U &= -g * \{[B_{kli} e_{kl} + C_{jkl} \varkappa_{kl} + c_{ji}(\theta + \alpha\dot{\theta})]_{,j} + \\ &\quad + \varepsilon_{ijk}(A_{jkrs} e_{rs} + B_{jkrs} \varkappa_{rs} + a_{jk}(\theta + \alpha\dot{\theta})\} + I_{ij}\varphi_j, \\ A_7 U &= g * [l * k_{ij}\theta_{,j} + \alpha k_{ij}\theta_{,j}]_{,i} + g * [a_{ij} e_{ij} + c_{ij}\varkappa_{ij} - d\theta - h\dot{\theta} + \\ &\quad + l * \alpha[a_{ij} e_{ij} + c_{ij}\varkappa_{ij} - d\theta - h\theta]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

It follows that the vector U is a solution of the mixed problem (1.1)—(1.9) if and only if

$$AU = F, \tag{4.4}$$

$$u_i = \tilde{u}_i \text{ on } \Sigma_1 \times [0, \infty), \quad \varphi_i = \tilde{\varphi}_i \text{ on } \Sigma_3 \times [0, \infty); \quad \theta = \tilde{\theta} \text{ on } \Sigma_5 \times [0, \infty), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &t_i = t_{ji} n_j = \tilde{t}_i \text{ on } \Sigma_2 \times [0, \infty), \quad m_i = m_{ji} n_j = \tilde{m}_i \text{ on } \Sigma_4 \times [0, \infty), \\ &q = q_i n_i = \tilde{q} \quad \text{on} \quad \Sigma_6 \times [0, \infty). \end{aligned} \tag{4.6}$$

The reciprocity relation (3.6) can be written in the form

$$\int_V [AU * V - U * AV] \mathrm{d}x = \int_\Sigma g * (U * \tau V - V * \tau U) \mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

where

$$\tau U = \left(t_1^1, t_2^1, t_3^1, m_1^1, m_2^1, m_3^1, l * \frac{1}{\theta_0} q^1 + \frac{\alpha}{\theta_0} q^1\right), \tag{4.8}$$

$$\tau V = \left(t_1^2, t_2^2, t_3^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2, l * \frac{1}{\theta_0} q^2 + \frac{\alpha}{\theta_0} q^2\right). \tag{4.9}$$

In the case of the homogeneous boundary conditions, from (4.7) we obtain

$$AU \otimes V = U \otimes AV \tag{4.10}$$

(the notations are those from [6], [10]) and we are lead to the functional :

$$\mathcal{M}(U) = (AU \otimes U) - 2(U \otimes F) = -\int_{\Sigma} g * \Big\{ t_{ji} n_j * u_i + m_{ji} n_j * \varphi_i -$$

$$(4.11) \quad -\frac{1}{\theta_0}[(l+\alpha) * q] * \theta \Big\} \mathrm{d}x + \int_V \{\rho u_i * u_i + I_{ij}\varphi_i * \varphi_j + g * [t_{ij} * e_{ij} +$$

$$+ m_{ij} * \varkappa_{ij} - (l+\alpha) * k_{ij}\theta_{,j} * \theta_{,i}] + (g+\alpha l) * (a - \rho\eta_i) * \theta\}\mathrm{d}x -$$

$$- 2\int_V [u_i * \rho f_i + \varphi_i * \rho m_i - (g+\alpha l) * W * \theta]\mathrm{d}x.$$

Theorem 4.2. *Let $D \subset D_A$ be the set of all vectors U which satisfy the homogeneous boundary conditions* (4.5) *and* (4.6). *Then*

$$(4.12) \qquad \delta\mathcal{M}(U) = 0 \text{ on } D$$

if and only if $U \in D$ satisfies the equation (4.4).

The condition (4.6) is a natural condition.

Let us consider now the case of nonhomogeneous boundary conditions. We assume that $\Psi \in D_A$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_7)$ satisfies the boundary conditions

$$(4.13) \quad \Psi_i = \tilde{u}_i \text{ on } \Sigma_1 \times [0,\infty), \quad \Psi_{3+i} = \tilde{\varphi}_i \text{ on } \Sigma_3 \times [0,\infty), \quad \Psi_7 = \tilde{\theta} \text{ on } \Sigma_5 \times [0,\infty),$$

$$(4.14) \quad t_i(\psi) = \tilde{t}_i \text{ on } \Sigma_2 \times [0,\infty), \; m_i(\psi) = \tilde{m}_i \text{ on } \Sigma_4 \times [0,\infty), \; q(\psi) = \tilde{q} \text{ on } \Sigma_6 \times [0,\infty).$$

We introduce the vector Z by relation $Z = U - \Psi$. Then Z satisfies the equation

$$(4.15) \qquad AZ = F - A\Psi$$

and the homogeneous boundary conditions. In this case we are lead to the functional

$$(4.16) \quad \Lambda(Z) = (AZ \otimes Z) - 2(Z \otimes (F - A\Psi)) = (AU \otimes U) + (A\Psi \otimes U) -$$
$$- (AU \otimes \Psi) - 2(U \otimes F) + 2(\Psi \otimes F) - (A\Psi \otimes \Psi).$$

Now, we consider the following functional:

$$\Gamma(U) = \int_V g * [t_{ij} * e_{ij} + m_{ij} * \varkappa_{ij} - (l+\alpha) * k_{ij}\theta_{,j} * \theta_{,i}]\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_V l * (l+\alpha) * (\rho\eta - a) * \theta \mathrm{d}x + \int_V [\rho u_i * u_i + I_{ij}\varphi_i * \varphi_j]\mathrm{d}x -$$

$$(4.17) \quad - 2\int_{\Sigma_2} g * u_i * \tilde{t}_i \,\mathrm{d}x - 2\int_{\Sigma_4} g * m_i * \varphi_i \mathrm{d}x - \int_{\Sigma_5} \left[g * \frac{1}{\theta_0}(l+\alpha) * q * \theta \right] \mathrm{d}x -$$

$$- 2\int_V [\rho f_i * u_i + \rho m_i * \varphi_i - (g * W + l * \alpha W) * \theta]\mathrm{d}x.$$

Theorem 4.3. *Let be* $S \subset D_A$ *the set of all vectors* U *which satisfies the boundary conditions* (4.5). *Then*

$$\delta\Gamma(U) = 0 \tag{4.18}$$

if and only if $U \in S$ *is a solution of the mixed problem.*

Received October 18, 1975

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Green A. E., Lindsay K. A., J. Elasticity, **2**, 1–7 (1972).
2. Green A. E., Laws, Arch. Rat. Mech. Anal., **35**, 47–59 (1972).
3. Rusu E., Bul. Inst. polit. Iaşi, **XXI (XXV)**, *3–4*, s. I (1975).
4. Boschi E., Ieşan D., Meccanica, **VIII**, *3*, 154–157 (1973).
5. Nowacki W., Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech. (III), 8, *14*, 505–513 (1966).
6. Ieşan D., Mem. Acad. Sci. Torino, Cls. Sci. Fisiche. Math. Nat., Ser. *4*, *17*.
7. Ieşan D., Rev. Roum. Math. pure et Appl., XV, *8* (1970).
8. Ieşan D., C. R. Acad. Sci. Paris, **9**, *265*, 271–274 (1967).
9. Gurtin M. E., Arch. Rat. Mech. Anal., **16**,43–50 (1964).
10. Hlavacek I., Aplikace Math., **16**, 43–63 (1971).
11. Ionescu Cazimir V., Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech., **12**, *12*, 565–573 (1964)

ASUPRA UNOR TEOREME ÎNTR-O TEORIE GENERALIZATĂ A TERMOELASTICITĂŢII MICROPOLARE

(Rezumat)

Se stabilesc o teoremă de unicitate a soluţiei pentru ecuaţiile teoriei generalizate a termoelasticităţii micropolare şi o teoremă de reciprocitate şi se deduc teoreme variaţionale, folosind metoda dată de D. Ieşan.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 539.31

ELASTIC EQUILIBRIUM OF ORTHOTROPIC ALMOST CYLINDRICAL BEAMS LOADED ON THE LATERAL SURFACE AND ON THE ENDS

BY

I. CRĂCIUN

1. Introduction

We consider an elastic body $\mathcal{B}$ limited by the planes $x_3 = 0$, $x_3 = l$, and by a surface $\mathcal{F}$ given by the equation

$$f[x_1(1 - \varepsilon\theta),\ x_2(1 - \varepsilon\theta)] = 0, \tag{1.1}$$

where ε is a small parameter, the square and higher powers of which can be neglected, and $\theta = \theta(x_3)$ is a given function of x_3. Just like in [4], we shall call a such body „almost cylindrical beam". Many results are known concerning the isotropic and anisotropic almost cylindrical beams. One more complet bibliography about this kind of beams may be found in [2].

In this paper we intend to study the elastic equilibrium of the beam $\mathcal{B}$ which is loaded on the lateral surface and on the ends.

We consider that the elastic material from which the beam is constituted is homogeneous and orthotropic, and that the planes of elastic symmetry coincide with the coordinate planes.

Without loss of generality we can suppose that $\theta(0) = 0$.

We shall take the axes Ox_k such that

$$\int_{S_h} x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0, \quad \int_{S_h} x_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0, \quad \int_{S_h} x_1x_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0, \tag{1.2}$$

where S_h is a cross-section of the almost cylindrical beam $\mathcal{B}$, and $0 \leqslant h \leqslant l$. We assume that the cross-section S_h is a simple-connected region bounded by a closed curve L_h.

2. Basic Equations and Statement of the Studied Problem

Everywhere in this paper the Latin subscripts are understood to range over the integers (1, 2, 3), whereas the Greek subscripts are confined to the range (1, 2). We also use the summation convention over repeated indices.

We suppose that there are not body forces, so that the equilibrium equations are

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}. \tag{2.1}$$

The tractions applied on the lateral surface are

$$\sigma_{ij} n_j = \sum_{k=0}^{n} \tau_i^{(k)}(x_1, x_2) x_3^k, \quad \text{on } \mathcal{F}, \tag{2.2}$$

where the functions $\tau_i^{(k)}(x_1, x_2)$ are prescribed and n_1, n_2, n_3 are the components of the unit vector of the outward normal to $\mathcal{F}$.

On the end $x_3 = 0$, we have the conditions

$$\int_{S_0} \sigma_{3i}\, dx_1\, dx_2 = -R_i, \tag{2.3}$$

$$\int_{S_0} x_\alpha\, \sigma_{33}\, dx_1\, dx_2 = (-1)^\beta M_\beta, \tag{2.4}$$

$$\int_{S_0} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31})\, dx_1 dx_2 = -M_3, \quad (\alpha \neq \beta),$$

where the vectors $\mathbf{R}(R_1, R_2, R_3)$ and $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$ are the resultant and the resultant moment of the tractions applied on the end $x_3 = 0$, and they are given. On the end $x_3 = l$, there are applied tractions so that the beam is in equilibrium.

The material of the beam being supposed orthotropic, the relations between the stress components σ_{ij} and the strain components γ_{ij} are taken in the form

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}\gamma_{11} + c_{12}\gamma_{22} + c_{13}\gamma_{33}, \\ \sigma_{22} = c_{12}\gamma_{11} + c_{22}\gamma_{22} + c_{33}\gamma_{33}, \\ \sigma_{33} = c_{13}\gamma_{11} + c_{23}\gamma_{22} + c_{23}\gamma_{33}, \\ \sigma_{23} = c_{44}\gamma_{23}, \quad \sigma_{31} = c_{55}\gamma_{31}, \quad \sigma_{12} = c_{66}\gamma_{12}, \end{cases} \tag{2.5}$$

where c_{ij} are constants which characterise the elastic properties of the material of the beam. The strain components γ_{ij} are connected with the displacements u_i by

$$\gamma_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \ \text{(not summed)}, \qquad \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (i \neq j). \tag{2.6}$$

The components of the strain must be satisfy the conditions of compatibility of Saint-Venant

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3}\right) = 2\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

We shall write the strain components γ_{ij} in terms of the stress components σ_{ij} in the form

$$
(2.8)\qquad \begin{cases} \gamma_{11} = \dfrac{1}{E}(\nu_{11}\sigma_{11} + \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_1\sigma_{33}), \\ \gamma_{22} = \dfrac{1}{E}(\nu_{12}\sigma_{11} + \nu_{22}\sigma_{22} - \nu_2\sigma_{33}), \\ \gamma_{33} = \dfrac{1}{E}(-\nu_1\sigma_{11} - \nu_2\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \gamma_{23} = \dfrac{1}{c_{44}}\sigma_{23}, \quad \gamma_{31} = \dfrac{1}{c_{55}}\sigma_{31}, \quad \gamma_{12} = \dfrac{1}{c_{66}}\sigma_{12}. \end{cases}
$$

The coefficients of the strain E, $\nu_{\alpha\beta}$, ν_ρ may be expressed in terms of c_{ij} [2].

Our problem consists in the solving of the equations (2.1), (2.5)—(2.7) with the boundary conditions (2.2)—(2.4).

In the case when $\theta(x_3) = x_3$ this problem was solved in [1].

3. Solution of the Stated Problem

If we perform the transformation

$$
(3.1)\qquad \xi_1 = x_1(1 - \varepsilon\theta), \qquad \xi_2 = x_2(1 - \varepsilon\theta), \qquad \xi_3 = x_3,
$$

$$
(3.1')\qquad x_1 = \xi_1(1 + \varepsilon\theta), \qquad x_2 = \xi_2(1 + \varepsilon\theta), \qquad x_3 = \xi_3,
$$

then the lateral surface (1.1) becomes

$$
(3.2)\qquad f(\xi_1, \xi_2) = 0,
$$

which is a cylindrical surface $\mathcal{F}_1$ in the space ξ_1, ξ_2, ξ_3. We denote by $\mathcal{V}$ the domain occupied by the beam in the space ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Obviously, this domain is a cylinder and its cross-section is S_0, with boundary L_0.

It may be easily proved that we have the following formulae

$$
(3.3\,a)\qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (1 - \varepsilon\theta)\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \varepsilon\theta'\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right),
$$

$$
(3.3\,b)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = (1 - 2\varepsilon\theta)\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_3} = (1 - \varepsilon\theta)\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_3} - \varepsilon\theta'\left(\xi_1\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_\alpha} + \xi_2\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} - 2\varepsilon\theta'\left(\xi_1\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + \xi_2\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3}\right) - \varepsilon\theta''\left(\xi_1\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2\dfrac{\partial}{\partial \xi_2}\right), \end{cases}
$$

and

$$
(3.4)\qquad n_1 = n_1^*, \quad n_2 = n_2^*, \quad n_3 = -\varepsilon\theta'(\xi_1 n_1^* + \xi_2 n_2^*).
$$

In the above formulae θ' is the derivative of the function θ with respect to ξ_3, n_i are the direction cosines of the outward normal to the surface $\mathcal{F}$ and n_1^*, n_2^* are the direction cosines of the outward normal to the curve L_0.

From (1.2) and (3.1), (3.1′) we obtain

$$\int_{S_0} \xi_1 \, d\sigma = 0, \quad \int_{S_0} \xi_2 \, d\sigma = 0, \quad \int_{S_0} \xi_1 \, \xi_2 \, d\sigma = 0. \tag{3.5}$$

This means that the axis of ξ_3 is the central-line of the beam $\mathcal{V}$ and the axis of ξ_1 and ξ_2 are the principal axes of inertia of the end belonging to $\xi_3 = 0$.

We shall try to find the solution of our problem supposing that the displacements u_i are given by

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \varepsilon u_i^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{3.6}$$

where u_i^* will be the displacements of a general problem for cylindrical beam $\mathcal{V}$ [3], and u_i^0 are additional unknown displacements.

In what follows we denote by γ_{ij}^* and σ_{ij}^* the strain components and the stress components corespondig to the displacements u_i^* in the space ξ_1, ξ_2, ξ_3, and by γ_{ij}^0, σ_{ij}^0 those corresponding to u_i^0.

From (2.5), (2.6), (3.3 a) and (3.6) we obtain

$$\begin{cases} \sigma_{ii} = (1 - \varepsilon\theta)\, \sigma_{ii}^* + \varepsilon\sigma_{ii}^0 - \varepsilon c_{i3} \nabla u_3^*, \\ \sigma_{\alpha 3} = (1 - \varepsilon\theta)\, \sigma_{\alpha 3}^* + \varepsilon\sigma_{\alpha 3}^0 - \varepsilon c_{\gamma\gamma} \nabla u_\alpha^*, \quad \gamma = 6 - \alpha, \\ \sigma_{12} = (1 - \varepsilon\theta)\, \sigma_{12}^* + \varepsilon\sigma_{12}^0, \end{cases} \tag{3.7}$$

where

$$\nabla = \theta' \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) - \theta \frac{\partial}{\partial \xi_3}.$$

Making use of the formulae (3.3 a), the equilibrium equations (2.1) may be written in the form

$$(1 - \varepsilon\theta)\, \sigma_{ij,j} - \varepsilon \nabla \sigma_{i3} = 0, \quad \text{in } \mathcal{V}, \ ^{1}) \tag{3.8}$$

With an accuracy up to ε^2 we have

$$\tau_i^{(p)}(x_1, x_2) = \tau_i^{(p)}(\xi_1, \xi_2) + \varepsilon\theta \left(\xi_1 \frac{\partial \tau_i^{(p)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial \tau_i^{(p)}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} \right), \tag{3.9}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

We suppose now that the displacements u_i^* solve the following problem

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^* = 0, \text{ in } \mathcal{V}, \quad \sigma_{i\alpha}^* n_\alpha^* = \sum_{p=0}^{n} \tau_i^{(p)}(\xi_1, \xi_2) \xi_3^p, \text{ on } \mathcal{F}_1, \quad \int_{S_0} \sigma_{i3}^* \, d\sigma = -R_i, \\ \int_{S_0} \xi_\alpha \sigma_{33}^* d\sigma = (-1)^\beta M_\beta, \quad \int_{S_0} (\xi_1 \sigma_{32}^* - \xi_2 \sigma_{31}^*) d\sigma = -M_3, \text{ for } \xi_3 = 0, \ (\alpha \neq \beta). \end{cases} \tag{3.10}$$

---

[1]) In what follows, the index j after comma indicates partial differentiation with respect to ξ_j.

The problem defined by (3.10) is the general problem for orthotropic cylindrical beam $\mathcal{V}$ and it was solved in [3], so that we shall suppose that the displacements u_i^* are known. If we analyse the results from [3], we see that u_i^* are polinomials of ξ_3 with coefficients depending of ξ_1, ξ_2

$$u_\alpha^* = \sum_{r=0}^{n+4} u_{\alpha r}^*(\xi_1, \xi_2)\,\xi_3^r, \qquad u_3^* = \sum_{r=0}^{n+3} u_{3r}^*(\xi_1, \xi_2)\xi_3^r.$$

Taking into account that the stresses σ_{ij}^* verify $(3.10)_1$, the equations (3.8) become equilibrium equations in the space ξ_1, ξ_2, ξ_3, for the stresses σ_{ij}^0, with body forces, and they have the form

$$\sigma_{ij,j}^0 = X_i^*, \quad \text{in } \mathcal{V}, \tag{3.11}$$

where

$$\left\{\begin{aligned} X_1^* &= 0'\sigma_{13}^* + \nabla\sigma_{13}^* + c_{13}(\nabla u_3^*)_{,1} + c_{55}(\nabla u_1^*)_{,3}\,, \\ X_2^* &= 0'\sigma_{23}^* + \nabla\sigma_{23}^* + c_{23}(\nabla u_3^*)_{,2} + c_{44}(\nabla u_2^*)_{,3}\,, \\ X_3^* &= 0'\sigma_{33}^* + \nabla\sigma_{33}^* + c_{44}(\nabla u_2^*)_{,2} + c_{55}(\nabla u_1^*)_{,1} + c_{33}(\nabla u_3^*)_{,3}. \end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

Obviously X_i^* will be known if u_i^* are known.
From (2.2), (3.4), (3.7), $(3.10)_2$ we obtain

$$\sigma_{i\chi}^0 n_\alpha = P_i^* + Q_i^*, \quad \text{on} \quad \mathcal{F}_1\,, \tag{3.13}$$

where

$$\left\{\begin{aligned} P_i^* &= 0'(\xi_1 n_1^* + \xi_2 n_2^*)\sigma_{i3}^* + 0\sum_{p=0}^{n}\left(\tau_i^{(p)} + \xi_1\frac{\partial\tau_i^{(p)}}{\partial\xi_1} + \xi_2\frac{\partial\tau_i^{(p)}}{\partial\xi_2}\right)\xi_3^p, \\ Q_\alpha^* &= c_{\alpha 3}\, n_\alpha^*\,\nabla u_3^*\,, \quad Q_3^* = c_{55}\, n_1^*\,\nabla u_i^* + c_{44}\, n_2^*\,\nabla u_2^*. \end{aligned}\right.$$

From (2.3), (3.1), (3.7) and $(3.10)_3$ we obtain

$$\int_{S_0}\sigma_{i3}^0\,\mathrm{d}\sigma = -\,R_i^0\,, \quad \text{on the end} \quad \xi_3 = 0, \tag{3.14}$$

where

$$R_i^0 = -\,c_{\gamma\gamma}\int_{S_0}\nabla u_i^*\,\mathrm{d}\sigma, \quad \gamma = 6 - i, \quad \xi_3 = 0.$$

The resultant moment of the stresses σ_{ij}^0 on the end $\xi_3 = 0$ may be obtained from (2.4), (3.1), $(3.10)_4$, (3.7)

$$\int_{S_0}\xi_\alpha\,\sigma_{33}^0\,\mathrm{d}\sigma = (-1)^\beta M_\beta^0, \quad \int_{S_0}(\xi_1\sigma_{32}^0 - \xi_2\sigma_{31}^0)\,\mathrm{d}\sigma = -M_3^0, \quad (\alpha \neq \beta), \tag{3.15}$$

where

$$M_\alpha^0 = (-1)^\alpha c_{33}\int_{S_0}\xi_\alpha\nabla u_3^*\,\mathrm{d}\sigma, \quad M_3^0 = \int_{S_0}(c_{55}\,\xi_2\,\nabla u_1^* - c_{44}\,\xi_1\,\nabla u_2^*)\,\mathrm{d}\sigma, \quad \xi_3 = 0.$$

Using the formulae (3.3b) and the fact that the displacements u_i satisfy the Saint-Venant's compatibility conditions (2.7), and the displacements u_i^* satisfy the same conditions in the space ξ_j, we obtain after simple manipulations that the unknown displacements u_i^0 verify the same conditions in the space ξ_j, that is

$$\begin{aligned} &\gamma^0_{11,22} + \gamma^0_{22,11} = \gamma^0_{12,12}\,,\dots \\ &(-\gamma^0_{23,1} + \gamma^0_{31,2} + \gamma^0_{12,3})_{,1} = 2\gamma_{11,23}\,,\dots \end{aligned} \tag{3.16}$$

Therefore the problem of finding the displacement u_i^0 was reduced to the problem of finding the solution σ^0_{ij} of the equations (3.11), with the boundary conditions given in (3.13)—(3.15) and with the condition that the strain components γ^0_{ij} calculated from (2.5) satisfy the Saint-Venant's compatibility conditions (3.16). But this is not a general problem of the same type those were studied in [3] and [1], because θ is not a polinomial.

If we suppose that θ is a polinomial of m degree

$$\theta(\xi_3) = \theta(x_3) = \sum_{q=1}^{m} \theta_q\, \xi_3^2\,, \quad \theta_q \in R, \tag{3.17}$$

then, after simple calculus we see that

$$\begin{cases} X^*_\alpha = \sum\limits_{p=0}^{N+3} g^{(p)}_\alpha\,(\xi_1,\ \xi_2)\ \xi_3^p\,, \\ X^*_3 = \sum\limits_{p=0}^{N+4} g^{(p)}_3\,(\xi_1,\ \xi_2)\xi_3^p\,, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \sigma^0_{\alpha\beta}\, n^*_\beta = \sum\limits_{p=0}^{N+3} f^{(p)}_\alpha\,(\xi_1,\ \xi_2)\xi_3^p\,, \\ \sigma^0_{3\beta}\, n^*_\beta = \sum\limits_{p=0}^{N+4} f^{(p)}_3\,(\xi_1,\ \xi_2)\xi_3^p\,, \end{cases} \tag{3.19}$$

where $g_i^{(p)}$, $f_i^{(p)}$ are expressed in terms of u_i^* and $N = m + n + 1$.

This last problem, defined by (3.11), (3.19), (3.14) — (3.16), with the body forces given in (3.18), was solved in [1].

Received September 2, 1974

Academy of the Socialist Republic of Romania,
Institute of Mathematics,
Jassy Division

REFERENCES

1. Borș C. I., Crăciun I., *The General Problem of the Orthotropic Almost Cylindrical Beams.* An. Șt. Univ., „Al. I. Cuza" Iași, s. Mat. (1975).
2. Borș C. I., *Teoria elasticității corpurilor anizotrope.* Edit. Acad., Buc., 1970.
3. Borș C. I., *On the General Problem of Orthotropic Beams Loaded on the Lateral Surface and on the Ends.* An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, s. Mat., **XIX**, *2* (1973).
4. Borș C. I., *Saint-Venant's Problem for Orthotropic Almost Cylindrical Beams.* Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl., **16**, *6* (1971).

ECHILIBRUL ELASTIC AL BARELOR ORTOTROPE APROAPE CILINDRICE ÎNCĂRCATE PE SUPRAFAȚA LATERALĂ ȘI PE CAPETE

(Rezumat)

Se consideră o bară aproape cilindrică mărginită de planele $x_3 = 0$, $x_3 = l$ și de suprafața (1.1). Materialul din care este alcătuită bara este omogen și ortotrop. Se studiază echilibrul elastic al acestei bare în cazul în care încărcările la care este supusă bara sînt date de (2.2)—(2.4). În cazul particular cînd funcția $\theta(x_3)$ este un polinom, problema echilibrului elastic se reduce la problema rezolvată în [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 539.31

GENERALIZED SAINT-VENANT'S PROBLEM FOR HETEROGENEOUS ANISOTROPIC ALMOST CYLINDRICAL BEAMS

BY

S. CHIRIȚĂ

1. Introduction

There is a vast literature on Saint-Venant's problem, but most of the papers concerned with this problem are restricted to cylindrical beams.

The problem of almost cylindrical beams in the theory of elasticity has been considered in various papers (see e. g. [1], [10], [11]). Recently, this problem was investigated in [3], for the case of an orthotropic and homogeneous material. In the case of heterogeneous orthotropic materials, Saint-Venant's problem was considered in [2], [9].

This paper is concerned with the problem of almost cylindrical beams composed of different homogeneous and anisotropic materials. We investigate the generalized Saint-Venant's problem when the almost cylindrical beam is subject to body forces and to surface tractions on the lateral surface and to appropriate stress resultants over its ends.

The generalized Saint-Venant's problem for an anisotropic and inhomogeneous elastic cylinder was studied recently by I e ș a n [6]. The corresponding problem for heterogeneous and anisotropic elastic cylinder has been studied in [4].

Our problem is reduced to two generalized Saint-Venant's problem for a cylindrical beam. The solutions of these problems can be obtained using the results of [4].

2. Statement of the Problem

Throughout this paper a rectangular Cartesian coordinate system Ox_k $(k = 1, 2, 3)$ is used. We shall employ the usual summation and differentiation conventions: Greek subscripts are understood to range over the integers (1, 2) whereas Latin subscripts — unless otherwise specified — to the range (1, 2, 3); summation over repeated subscripts is implied and subscripts preceded by a comma denote partial differentiation with respect to the corresponding coordinate.

In this paper we consider a beam limited by two planes $x_3 = 0$, $x_3 = l$ and a surface $\mathcal{F}$ given by

$$f[x_1(1 - \varepsilon x_3),\ x_2(1 - \varepsilon x_3)] = 0, \tag{2.1}$$

where ε is a small parameter, the square and higher powers of which can be neglected. Such beams were called almost cylindrical beams [1]. We suppose that the beam is composed by two homogeneous elastic materials. Let us denote by Π the surface of separation. We suppose that Π is given by a equation of the same form as (2.1) and that it separate the surface $\mathcal{F}$ in two parts $\mathcal{F}_\rho$. Let R the interior of beam and R_ρ the domain of R. bounded by $\mathcal{F}_\rho$ and Π. Let Σ the generic cross-section of beam. We denote by $\Sigma^{(0)}$ the cross-section located at $x_3 = 0$.

In what follows we consider the linear theory of classical elasticity. Let u_i denote the components of the displacement vector field. The components of the strain tensor are given by

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i},). \tag{2.2}$$

The stress-strain relations in the case of an anisotropic homogeneous elastic medium are

$$t_{ij} = C^{(\rho)}_{ijkl}\, e_{kl}\,, \quad \text{in } R_\rho\,, \tag{2.3}$$

where t_{ij} are the components of the stress tensor and $C^{(\rho)}_{ijkl}$ are the components of the elasticity tensor which obey the symmetry relations

$$C^{(\rho)}_{jikl} = C^{(\rho)}_{ijkl} = C^{(\rho)}_{klij}\,. \tag{2.4}$$

As a consequence of the relations (2.2), (2.4) the stress-strain relations take the form

$$t_{ij} = C^{(\rho)}_{ijkl}\, u_{k,l}\,. \text{ in } R_\rho. \tag{2.5}$$

The equilibrium equations are

$$t_{ji,j} + f_i^{(\rho)} = 0, \quad \text{in } R_\rho\,, \tag{2.6}$$

where $f_i^{(\rho)}$ are the components of body force vector.

On the lateral surface of the almost cylindrical beam we have the conditions

$$[t_{ji}\, n_j]_\rho = t_i^{(\rho)} \text{ on } \mathcal{F}_\rho\,, \tag{2.7}$$

where n_i are the direction cosines of the exterior normal to $\mathcal{F}_\rho$.

As in [6] we assume that the body forces and the tractions applied on the lateral surface are polynomials of the r-degree in the axial coordinate x_3, namely

$$f_i^{(\rho)} = \sum_{s=0}^{r} \mathcal{F}_{is}^{(\rho)}(x_1, x_2,)x_3^s, \qquad t_i^{(\rho)} = \sum_{s=0}^{r} p_{is}^{(\rho)}(x_1, x_2)x_3^s\,, \tag{2.8}$$

where $F_{is}^{(\rho)}$ and $p_{is}^{(\rho)}$ are prescribed functions which are supposed to belong to C^∞. We consider only a „C^∞-theory" but it is possible to get a treatment of the problem for more general domains and more restrictive assumptions of regularity for the above functions [5].

The displacement vector and the stress vector must be continuous in passing from one medium to another so that we have the conditions

$$[u_i]_1 = [u_i]_2, \quad [t_{ji}]_1 \nu_j = [t_{ji}]_2 \nu_j \quad \text{on } \Pi, \tag{2.9}$$

where we have indicated that the expressions from parantheses are calculated for the domains R_1 and R_2, respectively and ν_j are the direction cosines of the normal vector to Π and outward to R_1.

The load of the beam is distributed over its ends in a way which fulfills the equilibrium conditions of a rigid body. Let the loading applied on $x_3 = 0$ be statically equivalent to a force $P(P_i)$ and a moment $M(M_i)$. Thus, for $x_3 = 0$, we have the following conditions

$$\int_{\Sigma^{(0)}} t_{3i} d\sigma = -P_i, \quad \int_{\Sigma^{(0)}} x_\alpha t_{33} d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta 3} M_\beta, \quad \int_{\Sigma^{(0)}} \varepsilon_{\alpha\beta 3} x_\alpha t_{\beta 3} d\sigma = -M_3, \tag{2.10}$$

where ε_{ijk} denote the alternating symbol.

The problem consists in the solving of the equations (2.5), (2.6) with the conditions (2.7), (2.9), (2.10).

3. Reduction of the Problem

In what follows we make the transformation

$$\xi_\alpha = x_\alpha(1 - \varepsilon x_3), \quad \xi_3 = x_3. \tag{3.1}$$

Then the surfaces $\mathcal{F}$, Π and $\mathcal{F}_\rho$ become the cylindrical surfaces $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\Pi}$ and $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$, respectively, in the space of variables ξ_i, given by a equation of type

$$f(\xi_1, \xi_2) = 0. \tag{3.2}$$

Let $\tilde{\Sigma}$ the generic cross-section of cylindrical beam. We assume that $\tilde{\Sigma}$ is a C^∞-smooth domain [5]. Let L be the boundary of $\tilde{\Sigma}$ and L_1 and L_2 two disjoint subsets of L such that $L = L_1 \cup L_2$, $L_\rho = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\mathcal{F}}_\rho$. Let Γ be a curve contained in $\tilde{\Sigma}$ such that $\Gamma = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\Pi}$. Then we denote by $\tilde{\Sigma}_\rho$ the domain bounded by $L_\rho \cap \Gamma$.

We have the following formulae [1]

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (1 - \varepsilon\xi_3)\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \varepsilon\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha},$$
$$n_\alpha = \tilde{n}_\alpha, \quad n_3 = -\varepsilon\xi_\alpha \tilde{n}_\alpha, \tag{3.3}$$

where $\tilde{n}_\alpha$ are the direction cosines of the normal vector to $\tilde{\mathcal{F}}$.

According to the hypotheses of section **2**, if retain only the terms of order ε^1, we have

$$f_i^{(\rho)} = \sum_{s=0}^{r} F_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^s + \varepsilon \sum_{s=0}^{r} G_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^{s+1},$$

(3.4)

$$t_i^{(\rho)} = \sum_{s=0}^{r} p_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^s + \varepsilon \sum_{s=0}^{r} q_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^{s+1},$$

where

$$(3.5) \qquad G_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_\alpha \frac{\partial F_{is}^{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\bigg|_{x_\beta = \xi_\beta}, \quad q_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_\alpha \frac{\partial p_{is}^{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\bigg|_{x_\beta = \xi_\beta}.$$

In what follows we consider that the indices after comma denote partial differentiation with respect to variables ξ_i.

Taking into account the results from [1] we seek the solution in the form

$$(3.6) \qquad u_i = u_i^0 + \varepsilon v_i,$$

where $u_i^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ and $v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ are unknown functions.

Using (2.5), from (3.6), the components of the stress tensor have the expressions

$$(3.7) \qquad t_{ij} = (1 - \varepsilon\xi_3)\sigma_{ij} + \varepsilon\tau_{ij} - \varepsilon C_{ijn3}^{(\rho)}(\xi_\alpha u_{n,\alpha}^0 - \xi_3 u_{n,3}^0),$$

where

$$(3.8) \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(\rho)} u_{k,l}^0, \quad \tau_{ij} = C_{ijkl}^{(\rho)} v_{k,l}.$$

Taking into account (3.7), the equilibrium equations lead to the following equations

$$(3.9) \qquad \sigma_{ji,j} + \sum_{s=0}^{r} F_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^s = 0,$$

$$\tau_{ji,i} - C_{ijn3}^{(\rho)}(\xi_\alpha u_{n,\alpha}^0 - \xi_3 u_{n,3}^0)_{,j} - \xi_\alpha \sigma_{i3,\alpha} + \xi_3 \sigma_{i3,3} -$$

$$(3.10) \qquad - \sigma_{i3} + \sum_{s=0}^{r} H_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^{s+1} = 0, \quad \text{in} \quad \tilde{\Sigma}_\rho,$$

where

$$(3.11) \qquad H_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2) = G_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2) + 2F_{is}^{(\rho)}(\xi_1, \xi_2).$$

The condition (2.9) are satisfied if

$$(3.12) \qquad [u_i^0]_1 = [u_i^0]_2, \quad [\sigma_{i\alpha}]_1 \tilde{\nu}_\alpha = [\sigma_{i\alpha}]_2 \tilde{\nu}_\alpha,$$

$$(3.13) \qquad [v_i]_1 = [v_i]_2, \quad [\tau_{i\alpha}]_1 \tilde{\nu}_\alpha = [\tau_{i\alpha}]_2 \tilde{\nu}_\alpha + \chi_i, \quad \text{on } \Gamma,$$

where

$$\chi_i = \{[\xi_\alpha \sigma_{i3} + C^{(1)}_{i\alpha n3}(\xi_\lambda u^0_{n,\lambda} - \xi_3 u^0_{n,3})]_1 - [\xi_\alpha \sigma_{i3} + C^{(2)}_{i\alpha n3}(\xi_\lambda u^0_{n,\lambda} - \xi_3 u^0_{n,3})]_2\}\tilde{\nu}_\alpha. \tag{3.14}$$

From the conditions on the lateral surface (2.7) we obtain the following boundary conditions

$$\sigma_{i\alpha}\tilde{n}_\alpha = \sum_{s=0}^{r} p^{(\rho)}_{is}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^s, \tag{3.15}$$

$$\tau_{i\alpha}\tilde{n}_\alpha = C^{(\rho)}_{i\alpha n3}\tilde{n}_\alpha(\xi_\lambda u^0_{n,\lambda} - \xi_3 u^0_{n,3}) + \xi_\alpha \tilde{n}_\alpha \sigma_{i3} + \sum_{s=0}^{r} r^{(\rho)}_{is}(\xi_1, \xi_2)\xi_3^{s+1}, \text{ on } L_\rho, \tag{3.16}$$

where

$$r^{(\rho)}_{is}(\xi_1, \xi_2) = p^{(\rho)}_{is}(\xi_1, \xi_1) + q^{(\rho)}_{is}(\xi_1, \xi_2). \tag{3.17}$$

From the condition on the end $x_3 = 0$ we obtain, for $\xi_3 = 0$, the following conditions

$$\int_{\Sigma^{(0)}} \sigma_{i3}\mathrm{d}\sigma = -P_i, \quad \int_{\Sigma^{(0)}} \xi_\alpha \sigma_{33}\mathrm{d}\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta3}M_\beta, \quad \int_{\Sigma^{(0)}} \varepsilon_{\alpha\beta3}\xi_\alpha \sigma_{\beta3}\mathrm{d}\sigma = -M_3, \tag{3.18}$$

$$\int_{\Sigma^{(0)}} \tau_{i3}\mathrm{d}\sigma = -\bar{P}_i, \quad \int_{\Sigma^{(0)}} \xi_\alpha \tau_{33}\mathrm{d}\sigma = -\bar{M}_\alpha, \quad \int_{\Sigma^{(0)}} \varepsilon_{\alpha\beta3}\xi_\alpha \tau_{\beta3}\mathrm{d}\sigma = -\bar{M}_3, \tag{3.19}$$

where

$$\bar{P}_i = -\sum_{\rho=1}^{2} \int_{\Sigma^{(0)}_\rho} C^{(\rho)}_{i3n3}\xi_\alpha u^0_{n,\alpha}\mathrm{d}\sigma, \quad \bar{M}_\alpha = -\sum_{\rho=1}^{2} \int_{\Sigma^{(0)}_\rho} C^{(\rho)}_{33n3}\xi_\alpha \xi_\lambda u^0_{u,\lambda}\mathrm{d}\sigma,$$

$$\bar{M}_3 = -\sum_{\rho=1}^{2} \int_{\Sigma^{(0)}_\rho} \varepsilon_{\alpha\beta3} C^{(\rho)}_{\beta3n3}\xi_\alpha \xi_\lambda u^0_{n,\lambda}\mathrm{d}\sigma. \tag{3.20}$$

The problem defined by $(3.8)_1$, (3.9), (3.12), (3.15), (3.18) is a generalized Saint-Venant's problem for the cylindrical beam in the space of variables ξ_i. This problem may be solved as in [4], and in what follows we consider that u^0_i are determined. It is known [4] that u^0_i and σ_{ij} are polynomials of ξ_3, where the coefficients are functions of ξ_1 and ξ_2. Thus, the problem defined by $(3.8)_2$, (3.10), (3.13), (3.16), (3.19) is a generalized Saint-Venant's problem for the cylindrical beam, in the case when $\chi_i = 0$. If χ_i is a polynomial of ξ_3, then it is easy to see that this problem can be treated as in [4]. Thus, the initial problem is reduced to these generalized Saint-Venant's problems.

Received May 15, 1975

University „Al. I. Cuza", Jassy

REFERENCES

1. Borș C. I., *Teoria elasticității corpurilor anizotrope.* Ed. Acad., Buc., 1970.
2. Borș C. I., *Încovoierea barelor aproape cilindrice alcătuite din mai multe materiale ortotrope.* St. și cerc. șt., Fil. Iași, Acad. R. P. R., **11**, 175–185 (1960).
3. Borș C. I., Crăciun I., *The General Problem of the Orthotropic Almost Cylindrical Beams.* An. Șt. Univ. Iași (in print).
4. Chiriță S., Ieșan D., *Theory of Loaded Elastic Cylinders* (to appear).
5. Fichera G., *Existence Theorems in Elasticity.* Handbuch der Physik, vol. VI a/2, Springer, Berlin, 1972.
6. Ieșan D., *Saint-Venant's Problem for Anisotropic and Inhomogeneous Bodies.* J. of Elasticity (to appear).
7. Ieșan D., *Saint-Venant's Problem for Inhomogeneous and Anisotropic Solids.* J. Eng. Math. (in print).
8. Ieșan D., *Saint-Venant's Problem for Heterogeneous Anisotropic Elastic Solids.* Ann. Mat. Pura Appl. (to appear).
9. Khatiashvili G. M., *Saint-Venant's Problem for a Composed Anisotropic Bodies similar to Prismatic Bodies* (in Russian). Trudy Vyčisl. Centra Akad. Nauk Gruzin. SSR., **4**, 71–90 (1964).
10. Khatiashvili G. M., *Saint-Venant's Problem for Homogeneous Orthotropic Bodies similar to Prismatic Bodies* (in Russian). Trudy Tbilis. Gosud. Univ., *110* (1964).
11. Panov D. Yu., *On Torsion of Almost Prismatic Bars* (in Russian). Prikl. Math. and Mech., **2**, *2* (1938).

PROBLEMA LUI SAINT-VENANT GENERALIZATĂ PENTRU BARE APROAPE CILINDRICE ANIZOTROPE HETEROGENE

(Rezumat)

Se studiază problema lui Saint-Venant generalizată pentru bare aproape cilindrice anizotrope heterogene. Această problemă este redusă la rezolvarea a două probleme Saint-Venant generalizate pentru bare cilindrice. Astfel de probleme au fost rezolvate în [4].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

THE STUDY OF THE LIMITING PROCESS OF THE THERMOELECTRETS CHARGES

BY

EUGEN NEAGU and RODICA NEAGU

1. Introduction

In the process of the formation of the thermoelectrets can appear heterocharge as well as homocharge [1] corresponding to the polarisation of the dielectric, the trapping charges, the charge resulting from the electrons and ions which deposed on the surface of the electret when the intensity, of the electric field in the air gap between electret and electrod, exceeds the corresponding value of the dielectrical breakdown of the air, as well as accumulated charges at the dielectric-metal contact. The homocharge appears when the value of the heterocharge bekames too big and its effect is the lessening of this value [2]. In the specialized literatury it is considered that the dielectrical breakdown of the air takes place in the situation when the electret is shortcircuited and when the charge is measured by the method of the electrostatic induction [3]. In one of our former papers [4] it was shown that the limiting process of the electret charge appears during its formation, thus when the electrical tension is applied to the sample. We have proposed that this limitation will be named „the first limitation". The purpose of the paper is to calculate the maximum value of the surface charge density which can appear at the thermoelectret during its formation.

2. Theorie

We will consider that the electret is formed between two electrods such as between the electrods and electret remains an air gap, Fig. 1, noted with d_1. As it is shown in paper [5] the value of the electric field intensity can be expressed in the air gap, respectively in electret, through relations:

$$(1) \qquad E_1 = \frac{V+\sigma d_2/(\varepsilon_0 \varepsilon_\infty)}{2d_1 + d_2/\varepsilon_\infty}, \qquad (2) \qquad E_\lambda = \frac{V - 2\sigma d_2/\varepsilon_\infty}{2d_1\varepsilon_\infty + d_2},$$

where V is the potential difference applied to the two electrods; σ is the net surface charge density (heterocharge + homocharge) ε_0 — permitivity

of free space; ε_∞ — dielectrical constant of the sample corresponding instantaneous polarization. From relation (1) we obtain the expression of σ

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{d_2} E_1 \left(2d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_\infty} \right) - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{d_2} V. \tag{3}$$

We observe that the intensity of the electrical field between the electrod and electret increases at the same time with σ.

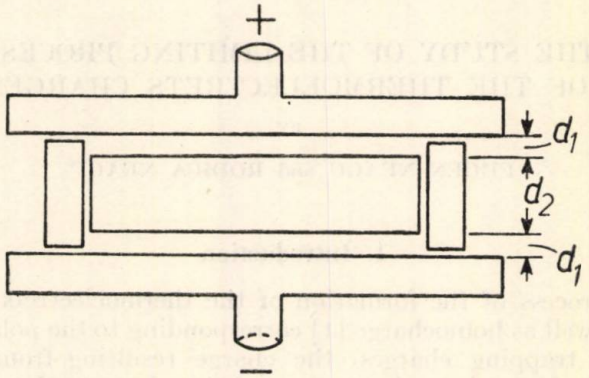

Fig. 1

We wonder why the value of σ, the intensity of the electric field between the dielectric and electrod, exceeds the dielectric breakdown strength of the air. It is known that the Paschen potential when takes place the dielectric breakdown of the air is given through

$$V = 3.10^2 + 4.10^4 d_1. \tag{4}$$

From (3) and (4) we obtain the value of σ for which takes place dielectrical breakdown of air

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{d_2} \left(\frac{3.10^2}{d_1} + 4.10^4 \right) \left(2d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_\infty} \right) - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{d_2} V. \tag{5}$$

Let us determine for which value of d_1, σ is maximum

$$\frac{d\sigma}{dd_1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{d_2} \left(-\frac{3.10^2}{d_1^2} \right) \left(2d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_\infty} \right) + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{d_2} \left(\frac{3.10^2}{d_1} + 4.10^4 \right) 2 = 0. \tag{6}$$

From here results that:

$$d_1^2 = \frac{3d_2}{8.10^2 \varepsilon_\infty}, \tag{7}$$

therefore d_1 depends only on d_2 and ε_∞.

Although all for a certain way of formations of the thermoelectret d_1 and d_2 are constant quantites, relation (5) will be satisfied, σ being an increasing function, at the moment when σ reaches a certain value. This value represents the maximum value of σ which can be obtained. The value of σ is limited by the homocharge which appears after the dielec-

trical breakdown of air, and we call this limitation „the first limitation." For clarifying more clearly its meaning we shall calculate the maximum value of σ

$$\sigma_{max} = \varepsilon_0 \left(6.10^3 \sqrt{\frac{2\varepsilon_\infty}{3d_2}} + 4.10^4\right)\left(\frac{1}{10}\sqrt{\frac{3\varepsilon_\infty}{2d_2}} + 1\right) - \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\infty}{d_2} V,$$

which can be written under the form

$$\sigma_{max} = 100\ \varepsilon_0 \left[20 + \sqrt{\frac{6\varepsilon_\infty}{d_2}}\right]^2 - \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\infty}{d_2} V. \tag{8}$$

J. Roos [6] had calculated the maximum value of the surface charge density of the electret maintained partially short-circuited, the value for which takes place dielectrical breakdown of the air between dielectric and electrod, and he found

$$\sigma_{ROOS} = 100\ \varepsilon_0 \left[20 + \sqrt{\frac{3\varepsilon_\infty}{L}}\right]^2. \tag{9}$$

For obtaining this relation there has been considered that between the dielectric and electrod exists an air gap h, diferent from the situation shown in Fig. 1 in which is considered to be two airgaps everyone noted with d_1. This makes that in the square root from relation (8) to appear 6 instead of 3.

In the same way it is justified [5] the appearance of ε_∞ in place of ε_1.

Results that the first termen of the second member of relation (8) is identical with the second membre of relation (9). It can be written

$$\sigma_{max} = \sigma_{ROOS} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\infty}{d_2} V. \tag{10}$$

It results that the maximum value of the surface charge density of the electret during formation is less than the value for which takes place dielectrical breakdown of the air — during the measurement of electret charge by the method of the lifted electrod or during the maintenance of short circuited electret.

On the basis of relation (10) it can be said that the maximum charge limitations of electret takes place even in the time of its formation, from the formation of homocharges after the dielectric breakdown of air between electret and electrod.

Since the maximum value of the electret charge during the process of formation is less with a quantity $(\varepsilon_0\varepsilon_\infty/d_2)V$, than the maximum value which the electret can have after it has been removed from the field, it is justified that we consider the limitation which takes place during the formation process as „the first limitation". In literature it is considered that limitation can take place only after the electret has been removed from the field and is short circuited or it is mesured by the method of lifted electrod.

The second term of the right member of relation (8), the term through which differs the two values of the net surface density of the

charge, it has values contained between $3.54\ 10^{-10}$ C/cm^2 and $177\ 10^{-10}$ C/cm^2 for d_2 varying between $5\ 10^{-3}$ m and 10^{-4} m. We have considered $\varepsilon_\infty = 2$ and $V = 1\,000$ V. It is observed that the term $(\varepsilon_0 \varepsilon_\infty / d_2)\ V$ has a value of the same order as the first term from relation (8). This fact shows that the termen cannot be neglected and therefore as value of σ for which appears the first limitation is less than the corresponding value of the dielectrical breakdown of the air during measurement or maintenance of electret.

This limitation explains why the first values measured for surface density of the charge, values which on considered that must be as appropriate to the maximum value given in relation (9), are smaller. It results that the first limitation makes the charge to be smaller.

3. Conclusion

Considering the expression of the intensity of the electrical field in air gaps between electret and electrod, during the formation of electret it can be determined the surface density of the charge of the electret. Starting from this expression it can be calculated the maximum value of the surface density of the charge for which takes places dielectric breakdown of air.

The value found by us is less with a term of the same order than the value found by J. Roos which considers, like what is considered in all the works of speciallity, that limitation appears only during electret scortcircuitance. These limitations we have suggessted to be called „the first limitation". This explains why the maximum values of σ experimentally determined are less than the values calculated on the basis of relation (9).

Received October 11, 1975

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Physics

REFERENCES

1. Gubkin A. N., *Electreţi* (transl. from Russian). Ed. tehn., Buc., 1963.
2. Perlman M. M., Reedyk C. W., J. Electrochem. Soc., 115, *1* (1968).
3. Wintle H. J., J. Acoust. Soc. Am., 53, *6*, 1 578 (1973).
4. Neagu E., Bul. Inst. polit. Iaşi, XXI (XXV), *1—2*, s. I (1975).
5. Neagu E., Prima conferinţă de magnetism, Iaşi, 1974.
6. Roos J., J. Appl. Phys., 40, *8*, 31—35 (1969).

STUDIUL PROCESULUI DE LIMITARE A SARCINILOR TERMOELECTREŢILOR

(Rezumat)

Considerînd expresia intensităţii cîmpului electric în interstiţiul de aer dintre electret şi electrod, în timpul formării electretului se poate determina expresia densităţii superficiale de sarcină a electretului. Pornind de la această expresie se poate calcula valoarea maximă a densităţii superficiale de sarcină pentru care are loc străpungerea dielectrică a aerului. Valoarea obţinută de autori este mai mică, cu un termen de acelaşi ordin de mărime, decît valoarea găsită de J. Roos, care consideră, aşa cum se consideră în toate lucrările de specialitate, că limitarea apare numai în timpul scurtcircuitării electretului. Această limitare noi am propus să fie numită „prima limitare". În acest fel se explică de ce valorile maxime ale lui σ determinate experimental sînt mai mici decît valorile calculate pe baza relaţiei (9).

Nr. coli tipar 7

Tiparul executat la Intreprinderea poligrafică Iaşi str. Vasile Alecsandri nr. 6
sub comanda nr. 31
Republica Socialistă România

1977 JAN

40822

F 1503/1

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 3—4

SECȚIA I MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ
FIZICĂ

1976

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

Tomul XXII (XXVI)

Fasc. 3–4

SECŢIA I MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ
FIZICĂ

1976

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. dr. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

Prof. dr. doc. AL. CLIMESCU
Prof. dr. doc. V. PETRESCU
Prof. em. GH. CIOBANU

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. doc. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
Asist. ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4 1976

Secția I

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

SUMAR

Pag.

AL. CLIMESCU și M. GONTINEAC, O clasă de operatori și ecuații corespunzătoare (I) (rom., rez. engl.) . . . 7
ȘTEFANIA RUSCIOR, Rețele Myller pe varietăți riglate în S_4 (rom., rez. franc.) 11
DARIO MARAVALL CASESNOVES (Spania), Vectori aleatori izotropi în spațiul Hilbert și în spații euclidiene (span., rez. rom.) . . . 15
ALFRED BRAIER, Asupra unor funcții pe algebre (engl., rez. rom.) . . . 21
I. POP și FULGA POP, Asupra acoperirilor spațiilor fibrate (engl., rez. rom.) 27
GH. COSTOVICI, Grupuri obținute din grupuri cu grupuri de operatori (engl., rez. rom.) . . . 33
PARASCHIVA BÎRSAN, Asupra relațiilor de echivalență (rom., rez. franc.) . 39
B. A. BONDARENKO (URSS), K. V. LEUNG (Canada), D. MANGERON și M. N. OGUZTORELI (Canada), Studiul ecuațiilor poliliniare cu derivate parțiale (I) (rusă, rez. rom.) . . . 45
EUGENIA MUNTEANU, Considerații asupra derivatei Lie a spin-tensorilor (rom., rez. franc.) . . . 49
ANCA PASCU, Asupra recursivității limbajelor dependente de context (engl., rez. rom.) . . . 53
VIOREL GHIUȘ și I. ONCIULENCU, Circulație în grafuri trasate arbitrar (rom., rez. franc.) . . . 57
GH. ANDRICIOAEI, Asupra spațiilor Finsler bi-recurente (franc., rez. rom.) 61
EVELYN OBAID (S.U.A.), Formulă Poisson pentru ecuația undelor bi-dimensionale (engl., rez. rom.) . . . 65
I. ONCIULENCU, Ecuații diferențiale analitice în spații Banach (II) (rom., rez. franc.) . . . 69
N. GRĂDINARU, O schemă cu diferențe pentru un sistem de ecuații neliniare de evoluție în spații Banach (engl., rez. rom.) . . . 73
O. A. JAUTÎKOV și V. G. BRODOVSKI (URSS), Rezolubilitatea problemelor de contur multipunctuale pentru ecuații diferențiale cu argument întîrziat (rusă, rez. rom.) . . . 75
GH. NISTOR, Metodă de calcul al deplasărilor verticale ale construcțiilor și evaluarea preciziei (rom., rez. franc.) . . . 80
SILVIA G. NEAGU, O metodă de aproximații succesive în teoria neliniară a solidului elastic dipolar simplu (I) (engl., rez. rom.) . . . 87
CORNELIU D. CIUBOTARIU, Acceleratorul de inducție relativist general (engl., rez. rom.) . . . 93
EMIL LUCA, C. COTAE și GH. CĂLUGĂRU, Efectul Procopiu în ferofluide (franc., rez. rom.) . . . 97
SOFIA MELINTE și V. MIHU, Proprietățile optice ale straturilor subțiri de Te (franc., rez. rom.) . . . 103
EUGEN NEAGU, Studiul influenței produse de metoda de măsură asupra valorii sarcinii electretului (franc., rez. rom.) . . . 109

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tome XXII (XXVI), Fasc. 3–4 1976

Section I

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

CONTENTS

	Pp.
AL. CLIMESCU and M. GONTINEAC, A Class of Operators and Croresponding Equations. (I) Derivatives of order one (Romanian, English summary) . .	7
ȘTEFANIA RUSCIOR, Réseaux de Myller sur les variétés réglées dans S_4 (Romanian, French summary)	11
DARIO MARAVALL CASESNOVES (Spain), Vectores aleatorios isotropos en el espacio de Hilbert y en los espacios euclideos (Spanish, Romanian summary)	15
ALFRED BRAIER, On some Functions on Algebras (English, Romanian summary)	21
I. POP and FULGA POP, On the Covering of Fibrations (I) (English, Romanian summary)	27
GH. COSTOVICI, Groups obtained from Groups with Groups of Operators (English, Romanian, summary)	33
PARASCHIVA BÎRSAN, Sur les relations d'antiéquivalence (Romanian, French summary)	39
B. A. BONDARENKO (USSR), K. V. LEUNG (Canada), D. MANGERON and M. N. OGUZTORELI (Canada), On a Class of Polilinear Partial Differential Equations (I) (Russian, Romanian summary)	45
EUGENIA MUNTEANU, Considérations sur la dérivée de Lie des spin-tenseurs (Romanian, French summary)	49
ANCA PASCU, On the Recursiveness of Context-sensitive Languages (English, Romanian summary)	53
VIOREL GHIUȘ and I. ONCIULENCU, La circulation dans les graphes tracés arbitrairement (Romanian, French summary)	57
GH. ANDRICIOAEI, Sur les espaces Finsler bi-récurrents (French, Romanian summary)	61
EVELYN OBAID (USA), Poisson's Formula for the Two Dimensional Wave Equation (English, Romanian summary)	65
I. ONCIULENCU, Équations différentielles analytiques dans des espaces de Banach (Romanian, French summary)	69
N. GRĂDINARU, A Difference Scheme for a System of Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces (English, Romanian summary)	73
O. A. ZHAUTYKOV and V. G. BRODOVSKI (USSR), Multi-point Boundary Value Problems for Differential Equations with Time-lag (Russian, Romanian summary)	75
GH. NISTOR, Méthode de calcul pour les déplacements verticales des constructions et détermination de la précision (Romanian, French summary) . .	80
SILVIA G. NEAGU, A Method of Succesive Approximation in Nonlinear Theory of Simple Dipolar Elastic Solid (I) (English, Romanian summary) . . .	87
CORNELIU D. CIUBOTARIU, The General Relativistic Induction Accelerator (English, Romanian summary)	93
EMIL LUCA, C. COTAE et GH. CĂLUGĂRU, L'effet Procopiu aux ferrofluides (French, Romanian summary)	97
SOFIA MELINTE et V. MIHU, Les propriétés optiques des couches minces de Te (French, Romanian summary)	103
EUGEN NEAGU, Étude de l'influence produite par la méthode de mesure sur la valeur de la charge de l'électret (French, Romanian summary)	109

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XXII (XXVI), Вып. 3—4 1976

Секция I

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр
АЛ. КЛИМЕСКУ и М. ГОНТИНЯК, Класс операторов и дифференциальные уравнения (I) (рум., рез. англ.)	7
ШТЕФАНИЯ РУЩИОР, Сети Миллера на линеичатых многообразиях в S_4 (рум., рез. франц.)	11
ДАРИО МАРАВАЛ КАСЕСНОВЕС (Испания), Изотропные случайные векторы в гильбертовых пространствах (исп., рез. рум.)	15
АЛФРЕД БРАЙЕР, Об некоторых функтиях над алгебрами (англ., рез. рум.)	21
И. РОП и ФУЛГА ПОП, О накрывающие пространствах расслоений (англ., рез. рум.)	27
Г. КОСТОВИЧ, Группы, полученные из операторных груп, для которых области операторов являются группами (англ., рез. рум.)	33
ПАРАСКИВА БЭРСАН, Об отношении антиэквивалентности (рум., рез. франц.)	39
Б. А. БОДНАРЕНКО (СССР), К. В. ЛЕН (Канада), Д. МАНХЕРОН и М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (Канада), К исследованию полилинейных уравнений с частньми производными (русск., рез. рум.)	45
ЭУДЖЕНИЯ МУНТИАНУ, Некоторые замечания о производной в смысле Ли для спин - тензоров (рум., рез. франц.)	49
АНКА ПАСКУ, О рекурсивности языков зависимые от контекста (англ., рез. рум.)	53
ВИОРЕЛ ГЮШ и И. ОНЧЮЛЕНКУ, Движение в графах трасированно случайно (рум., рез. франц.)	57
Г. АНДРИЧИОАЕИ, О би-рекуррентных финслеровых пространствах (франц., рез. рум.)	61
ЭВЕЛИН ОБЕИД, Формул Поассона для двухмерное волновое уравнения (англ., рез. рум.)	65
И. ОНЧЮЛЕНКУ, Аналитические дифференциальнье уравнения в банаховых пространсвах (II) (рум., рез. франц.)	69
Н. ГРЭДИНАРУ, Разностная схема для эволюционных нелинеиных систем уравнении в банаховых пространствах (англ., рез. рум.)	73
О. А. ЖАУТЬКОВ и В. Г. БРОДОВСКИЙ, (СССР), О разрешимости многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (русск., рез. рум.)	75
Г. НИСТОР, Метод расчета вертикальных смещении сооружений (рум., рез. франц.)	80
СИЛЬВИЯ Г. НЯГУ, Последовательные приближения в теории простовы диполярного элластического тела (I) (англ., рез. рум.)	87
КОРНЕЛЮ Д. ЧУБОТАРИУ, Общерелятивисткий индукционный ускоритель (англ., рез. рум.)	93
ЭМИЛ ЛУКА, К. КОТАЕ и Г. КЭЛУГЭРУ, Эффекта Прокопиу в ферроджидкости (франц., рез. рум.)	97
СОФИЯ МЕЛИНТЕ и В. МИНУ, Оптические своиства тонких слоев Те (франц., рез. рум)	103
ЭУДЖЕН НЯГУ, Исследование влияния методы измерения на величину заряда электрета (франц., рез. рум.)	109

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXVI (XXVI), fasc. 3—4, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 517.43

O CLASĂ DE OPERATORI ȘI ECUAȚII CORESPUNZĂTOARE

I. OPERATORI DE DERIVARE DE ORDINUL UNU

DE

AL. CLIMESCU și M. GONTINEAC

Într-o lucrare anterioară cu caracter programatic s-a definit o clasă de operatori liniari atașați șirurilor numerice indexate de la $-\infty$ la $+\infty$. Ne propunem să dezvoltăm probleme legate de acești operatori pe care convențional i-am numit operatori de derivare, urmînd ca ulterior să trecem la probleme legate de operatori de ordin superior.

Inițial vom trata șirul derivatelor șirului a_n cu $n \in Z$ și de pas 1. Definim diferite moduri de derivare a termenului a_0, apoi analog pentru un a_n, oarecare n din Z.

D e f i n i ț i a 1. Numim derivată a lui a_0 în modul $-p$, q și o notăm cu $\Delta_{-p,q}\, a_0 = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i a_i$ unde coeficienții $\alpha_{-p}, \alpha_{-p+1}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in R$ fixați și satisfăcînd condițiile

$$(1) \qquad \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i = 0 \qquad \text{și} \qquad (1') \qquad \sum_{i=-p}^{q} i\,\alpha_i = 1.$$

Analog o derivată a lui a_n notată $\Delta_{-p,q}\, a_n = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i \alpha_{n+i}$, α_i satisfăcînd condițiile (1) și (1'). Este evident că pentru orice alegere a lui $\alpha_i \in R$ satisfăcînd condițiile (1) și (1') se obține cîte o derivată.

D e f i n i ț i a 2. Doi operatori sînt egali dacă coeficienții cu aceiași indici sînt egali.

Se definește în mod obișnuit suma a doi operatori și produsul cu un număr real, operatorii combinație liniară ne mai fiind în general derivate.

D e f i n i ț i a 3. Numim derivată la dreapta a lui a_0 în modul p și o notăm cu $\Delta_p a_0 = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i a_i$, unde coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in R$ fixați satisfăcînd condițiile

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 0 \qquad \text{și} \qquad (2') \qquad \sum_{i=1}^{p} i\,\alpha_i = 1.$$

Analog o derivată la dreapta a lui a_n, $\Delta_p a_n = \sum_{i=0}^{n+p} \alpha_i a_{n+i}$, coeficienții $\alpha_i \in R$ satisfăcînd condițiile (2) și (2′).

Definiția 4. Numim derivată la stînga a lui a_0 în modul p și o notăm $\Delta_{-p} a_0 = \sum_{i=-p}^{0} \alpha_i a_i$, unde coeficienții $\alpha_{-p}, \alpha_{-p+1}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0 \in R$ fixați și satisfăcînd condițiile:

$$(3) \quad \sum_{i=-p}^{0} \alpha_i = 0 \qquad \text{și} \qquad (3') \quad \sum_{i=-p}^{1} i\alpha_i = 1.$$

Analog o derivată la stînga a lui a_n, $\Delta_p a_n = \sum_{i=-p}^{0} \alpha_i a_{n+i}$, coeficienții $\alpha_i \in R$ satisfăcînd condițiile (3) și (3′).

Definiția 5. Numim derivate bază a lui a_0 operatorii notați d_n definiți prin:

$$(4) \quad d_n a_0 = \frac{a_n - a_0}{n},$$

unde $n \in Z - \{0\}$. Analog derivate bază pentru a_m, $d_n a_m = (a_{n+m} - a_m)/n$, $n \in Z - \{0\}$ și $m \in Z$.

Propoziția 1. *O combinație liniară de operatori de derivare a lui a_0 avînd suma coeficienților 1 este de asemenea un operator de derivare.*

Fie $\Delta_{-p,q} a_0$ și $\Delta_{-s,r} a_0$ două moduri de derivare a lui a_0. Să arătăm că $\lambda\Delta_{-p,q} a_0 + (1-\lambda)\Delta_{-s,r} a_0$ este tot un mod de derivare a lui a_0. Conform definiției 1, $\Delta_{-s,r} a_0 = \sum_{i=-s}^{r} \beta_i a_i$ cu coeficienții $\beta_i \in R$ satisfăcînd condițiile:

$$(5) \quad \sum_{i=-s}^{r} \beta_i = 0 \qquad \text{și} \qquad (5') \quad \sum_{i=-s}^{r} i\beta_i = 1.$$

Atunci

$$\lambda\Delta_{-p,q} a_0 + (1-\lambda)\Delta_{-s,r} a_0 = \lambda \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i a_i + (1-\lambda) \sum_{i=-s}^{r} \beta_i a_i .$$

Să arătăm că coeficienții lui a_i satisfac condiții de tip (1) și (1′). Datorită condițiilor (1) și (5) $\lambda \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{i=-s}^{r} \beta_i = 0$. Datorită condițiilor (1′) și (5′) $\lambda \sum_{i=-p}^{q} i\alpha_i + (1-\lambda) \sum_{i=-s}^{r} i\beta_i = \lambda + 1 - \lambda = 1$.

Observație. Propoziția se poate extinde pentru o combinație de operatori de derivare în care suma coeficienților este 1.

Propoziția 2. *Orice operator de derivare a lui a_0 se poate exprima ca o combinație liniară unică cu suma coeficienților 1 de operatori bază $d_n a_0$.*

Fie $\Delta_{-p,q} a_0$ un operator de derivare a lui a_0. $\Delta_{-p,q} a_0 = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i a_i$, $\alpha_i \in R$ satisfăcînd condițiile (1) și (1′). Din (4) avem $a_n = a_0 + n d_n a_0$ și atunci

$$\Delta_{-p,q}\, a_0 = \sum_{\substack{i=-p \\ i\neq 0}}^{q} \alpha_i (a_0 + i\, d_i a_0) + \alpha_0 a_0 = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i a_0 + \sum_{\substack{i=-p \\ i\neq 0}}^{q} i\, \alpha_i\, d_i a_0$$

dar datorită lui (1) $\sum_{i=-p}^{q} \alpha_i\, a_0 = 0$, atunci $\Delta_{-p,q}\, a_0 = \sum_{\substack{i=-p \\ i\neq 0}}^{q} (i\, \alpha_i)\, d_i a_0$ dar, datorită lui (1') $\sum_{i=-p}^{q} i\, \alpha_i = 1$ și deci propoziția este demonstrată.

Se constată oarecare analogie cu spațiile liniare, analogie care se păstrează și prin faptul existenței unei infinități de sisteme de derivate bază. De exemplu derivate bază a lui a_0 pot fi $a_n - a_{n-1}$ cu $n \in Z$.

Putem atașa șirului a_n cu $n \in Z$ funcțiile raționale x^n cu $x \in R - \{0\}$, care se reduc la polinoame pentru derivatele la dreapta, respectiv polinoame în $1/x$ pentru derivatele la stînga.

Orice fracție rațională $F_0(x) = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i\, x^i$ satisfăcînd condițiile:

(6) $F_0(1) = 0$ și (6') $F_0'(1) = 1$

corespunde derivatei $\Delta_{-p,q}\, a_0$.

Analog $F_n(x) = x^n \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i\, x^i$ satisfăcînd condițiile:

(7) $F_n(1) = 0$ și $F_n'(1) = 1$

corespunde derivatei $\Delta_{-p,q}\, a_n$.

Fracțiile raționale $f_n(x) = (x^n - 1)/n$ cu $n \in Z - \{0\}$ corespund derivatelor bază $d_n a_0$.

Utilitatea corespondenței dintre operatorii de derivare și fracțiile raționale atașate constă în faptul că obișnuitele operații asupra fracțiilor raționale corespund cu operațiile similare asupra derivatelor și sugerează noi operații asupra derivatelor din alte operații asupra fracțiilor raționale.

Prin corespondența semnalată propozițiile 1 și 2 se pot demonstra cu ajutorul fracțiilor raționale.

Considerăm șirurile de pas h notate a_{nh} cu $n \in Z$ și $h > 0$ oarecare. O derivată în modul $-p$, q a lui a_0 va fi $\Delta_{-p,q}\, a_{0,h} = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i\, a_{ih}$, $\alpha_i \in R$ satisfăcînd condițiile

(8) $$\sum_{i=-p}^{q} \alpha_i = 0 \quad \text{și} \quad \sum_{i=-p}^{q} i\, \alpha_i = \frac{1}{h}.$$

Prin particularizări analoge făcute anterior se obțin derivate la dreapta, respectiv la stînga lui a_0.

Derivatele bază sînt $d_n\, a_{0,h} = \dfrac{a_{nh} - a_0}{nh}$.

Propozițiile (1) și (2) se demonstrează analog.

Fracțiile raționale $F_{0,h}(x) = \sum_{i=-p}^{q} \alpha_i x^i$ satisfăcînd condițiile

$$F_{0,h}(1) = 0 \quad \text{și} \quad F'_{0,h}(1) = 1 \tag{9}$$

corespund operatorilor de derivare $\Delta_{-p,q}\, a_{0,h}$ cu condițiile (8). Se observă că singura condiție suplimentară s-a făcut atașînd lui a_{nh}, x^n.

Derivatelor bază $d_n a_{0,h}$ le atașăm $f_{0,h}(x) = (x^n - 1)/nh$.

Observația 1. Se obține o reprezentare injectivă a mulțimii derivatelor lui a_0 în ea însăși astfel : coeficienții se împart prin k iar indicii se înmulțesc cu k, $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Prin această reprezentare pentru $k = -1$ mulțimea derivatelor la stînga se reprezintă pe mulțimea derivatelor la dreapta, corespondența fiind în acest caz bijectivă.

Observația 2. Considerînd mulțimea șirurilor de pas $1, 1/2, \ldots, 1/k, \ldots$, $k \in N$, alegînd cîte un operator de derivare pentru fiecare k se observă că oricare ar fi valoarea rațională p/q există pentru $a_{\frac{p}{q}}$ o infinitate de derivate.

Putem în felul acesta să considerăm că avem definită pe limita inductivă a acestor mulțimi de șiruri o derivată multivocă în fiecare punct p/q, sau o altă interpretare, că avem definită o derivată multivocă pentru orice funcție definită numai pe numere raționale.

Primită la 25 iunie 1976

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Climescu Al., Gontineac M., Motreanu D., *O clasă de operatori și ecuații corespunzătoare.* Bul. Inst. polit. Iași, XX (XXIV), *3–4*, s. I (1974).

A CLASS OF OPERATORS AND CORRESPONDING EQUATIONS
I. Derivatives of order one

(Summary)

Developping the programme sketched in [1] the calculus of the generalized derivatives of order I are dealt with.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 513.7

REȚELE MYLLER PE VARIETĂȚI RIGLATE DIN S_4

DE

ȘTEFANIA RUSCIOR

În această Notă se consideră varietăți riglate din S_4 euclidian pe care găsim rețele analoage cu rețelele Myller M studiate de Octav Mayer în S_3 [1].

Fie o varietate riglată V de tip 2.I [2] dată de ecuația

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u, v) + w[\bar{a}(u) + m\bar{b}(v)]. \tag{1}$$

Varietatea (1) este deteminată de suprafața directoare Σ de ecuația $\bar{r} = \bar{\rho}(u, v)$ și de versorul $\bar{\alpha}(u, v)$ al unei generatoare generice Γ determinat în fiecare punct al suprafeței Σ prin relația $\bar{\alpha} = \bar{a}(u) + m\bar{b}(v)$, cu $m = \text{const}$. Presupunem indeplinite condițiile de regularitate pentru funcțiile care determină elementele varietății V. De asemenea sînt îndeplinite și condițiile pentru ca varietatea V să fie de tip 2.I. Vom defini rețelele Myller M pe varietatea V prin curbe pe care elementul de arc are forma :

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + [\mathcal{M}(u, v)w^2 + \mathcal{N}(u, v)w + \mathcal{P}(u, v)]\, dw^2, \tag{2}$$

cu $w \neq 0$ și $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ funcții de parametrii u și v.

Pe varietatea V sînt așezate două familii de suprafețe riglate $\mathfrak{S}$ și $\mathfrak{S}^*$ care au generatoarele g și g^* determinate respectiv de versorii $\bar{a}(u)$ și $\bar{b}(v)$ de-a lungul liniilor parametrice $v = \text{const}$. și $u = \text{const}$. ale suprafeței directoare Σ. Fie $\mathfrak{M}$ mulțimea generatoarelor g de pe $\mathfrak{S}$ și $\mathfrak{M}^*$ mulțimea generatoarelor g^* de pe $\mathfrak{S}^*$. Prin fiecare punct al suprafeței Σ trece cîte o generatoare $g \in \mathfrak{M}$ și o generatoare $g^* \in \mathfrak{M}^*$. Este determinată astfel o funcție Ψ definită pe $\mathfrak{M}$ cu valori în $\mathfrak{M}^*$, deoarece pentru

$$\forall g \in \mathfrak{M} \rightarrow g^* \in \mathfrak{M}^*$$

astfel încît perechea $(g, g^*) \in G$, unde prin G am notat graficul funcției Ψ. În cazul considerat, acest grafic este mulțimea generatoarelor varietății V, iar perechea de generatoare (g, g^*) determină planul de bază al fasciculului de hiperplane tangente duse varietății V de-a lungul unei generatoare Γ [2]. Funcția Ψ : $(G, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*)$, exprimată prin relația funcțională $g^* = \Psi(g)$, are următoarele proprietăți :

1° Este injectivă, deoarece pentru $\forall g_1, g_2 \in \mathfrak{M}$, cu $g_1 \neq g_2$, avem $\Psi(g_1) \neq \neq \Psi(g_2)$. În adevăr, generatoarea g_1 taie suprafața Σ într-un punct P_1 determinat de $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, și prin acel punct trece o singură generatoare $g_1^* \in \mathfrak{M}^*$. Deoarece $g_2 \neq g_1$, g_2 intersectează suprafața Σ într-un punct $P_2 \neq P_1$, și prin punctul P_2 trece o singură generatoare $g_2^* \in \mathfrak{M}^*$, deci $\Psi(g_1) \neq \Psi(g_2)$.

2° Este surjectivă, deoarece pentru $\forall g^* \in \mathfrak{M}^*$ există o generatoare $g \in \mathfrak{M}$ astfel încît $g^* = \Psi(g)$, — aceasta după felul în care au fost definite mulțimile $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{M}^*$ de pe varietatea (1).

3° Fiind injectivă și surjectivă, este bijectivă. Prin urmare Ψ este inversabilă. Avem $\Psi^{-1} : \mathfrak{M}^* \to \mathfrak{M}$ cu relația funcțională $g = \Psi^{-1}(g^*)$. În adevăr, oricare generatoare $g^* \in \mathfrak{M}$ intersectează suprafața directoare Σ într-un singur punct P, și prin acel punct trece o singură generatoare $g \in \mathfrak{M}$.

Rețelele M, definite prin (2), se obțin pe varietatea V dacă parametrul w nu este arbitrar, ci, conform definiției date, este o funcție de u și v dată de relația

$$\mathcal{M}(u, v)w^2 + \mathcal{N}(u, v)w + \mathcal{P}(u, v) = 1 + m^2. \tag{3}$$

Alegînd convenabil parametrii u, v de pe Σ, avem :

$$\mathcal{P}(u, v) = 1 + m^2 \quad \text{și} \quad w = -\frac{\mathcal{M}(u, v)}{\mathcal{N}(u, v)}, \quad \mathcal{N}(u, v) \neq 0.$$

Deci pe varietatea V rețelele M sînt situate pe suprafețele riglate date de valoarea lui w determinată mai sus. Elementele acestor suprafețe satisfac sistemul

$$\begin{cases} \left(\bar{\rho}_u + w\bar{a}' + \dfrac{\partial w}{\partial u}\bar{a}\right)^2 = 1, \\ \left(\bar{\rho}_v + w\bar{b}' + \dfrac{\partial w}{\partial v}\bar{b}\right)^2 = 1, \\ \bar{\rho}_u \cdot \bar{\rho}_v + w(\bar{\rho}_u\bar{b}' + \bar{\rho}_v\bar{a}') + \dfrac{\partial w}{\partial u}\bar{\rho}_v \cdot \bar{a} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\bar{\rho}_u \cdot \bar{b} = 0, \\ \left(\bar{\rho}_u + w\bar{a}' + \dfrac{\partial w}{\partial u}\bar{a}\right) \cdot (\bar{a} + m\bar{b}) = 0, \\ \left(\bar{\rho}_v + w\bar{b}' + \dfrac{\partial w}{\partial v}\bar{b}\right) \cdot (\bar{a} + m\bar{b}) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

A treia ecuație a sistemului (4) este o consecință a ultimelor două ecuații, și tot de aici rezultă vectorii

$$\bar{\rho}_u + w\bar{a}' + \frac{\partial w}{\partial u}\bar{a} \quad \text{și} \quad \bar{\rho}_t + w\bar{b}' + \frac{\partial w}{\partial v}\bar{b}$$

coliniari. Sistemul (4) este verificat în cazul varietății particulare V_0 :

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{\rho}(u, v) = \bar{\rho}_1(u) + \bar{\rho}_2(v), \\ \bar{a} = \bar{\rho}_1', \quad \bar{b} = \bar{\rho}_2', \quad \bar{\rho}_1'' = \lambda\bar{\rho}_2'', \quad \lambda \in \mathcal{R}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial w}{\partial v}. \end{cases}$$

Rezultă că w este o funcție arbitrară F, depinzînd de argumentul $u + v$ și satisfăcînd relația

$$w = F(u + v) = -\frac{\mathcal{M}(u, v)}{\mathcal{N}(u, v)}.$$

În aceste condiții suprafețele $\mathbb{S}$ și $\mathbb{S}^*$ sînt suprafețe riglate desfășurabile. Prin urmare, pe varietatea V_0, dată de (5), rețelele M sînt formate din două familii de curbe γ_1 și γ_2 (așezate respectiv pe suprafețele $\mathbb{S}$ și $\mathbb{S}^*$) de ecuații :

$$\bar{r} = \bar{\rho}_1(C_1) + \bar{\rho}_2(v) - F(C_1 + v)[\bar{\rho}_1'(C_1) + m\bar{\rho}_2'(v)],$$
$$\bar{r} = \bar{\rho}_1(u) + \bar{\rho}_2(C_2) - F(C_2 + u)\,[\bar{\rho}_1'(u) + m\bar{\rho}_2'(C_2)],$$

în care C_1 și C_2 sînt constante arbitrare).

Rețelele M introduse pe V_o au următoarele proprietăți :

1° Funcția Ψ face să corespundă familiei de curbe γ_1 familia γ_2. Aceasta deoarece curbele γ_1 sînt formate din puncte $A \in g$, iar γ_2 din puncte $A^* \in g^*$, și coordonatele proiective ale punctelor A și A^* sînt date de $w = F(u + v)$, determinate, respectiv, de $u = C_1$ și $v = C_2$. Rezultă că funcția Ψ păstrează rețelele M invariante pe V_0, în sensul că transformă o familie a rețelei în cealaltă familie.

2° Patru curbe din sisteme diferite ale rețelei M determină pe generatoarele g și g^* puncte ce formează același biraport. Aceasta, deoarece un sistem de curbe din rețeaua M determinată pe V_0 formează o familie de curbe R pe suprafețele riglate $\mathbb{S}$, respectiv $\mathbb{S}^*$ [3].

3° Planele tangente duse suprafețelor $\mathbb{S}$ și $\mathbb{S}^*$ de pe V în punctele corespunzătoare A și A^* de pe rețeaua M sînt plane tangente semiparalele [4]. În adevăr, planul tangent dus în punctul $A \in g$ al suprafeței $\mathbb{S}$ este determinat de vectorii $\bar{\rho}_u + w\bar{a}' + \dfrac{\partial w}{\partial u}\bar{a}$ și $\bar{a}$, iar planul tangent dus în $A^* \in g^*$ la suprafața $\mathbb{S}^*$ este determinat de vectorii $\bar{\rho}_v + w\bar{b}' + \dfrac{\partial w}{\partial v}\bar{b}$ și $\bar{b}$. Acești patru vectori formează o matrice funcțională de rang 3, deoarece determinantul următor este nul, elementele lui satisfăcînd sistemul (4) :

$$\left[\bar{\rho}_u + w\bar{a}' + \frac{\partial w}{\partial u}\bar{a},\ \bar{\rho}_v + w\bar{b}' + \frac{\partial w}{\partial v}\bar{b},\ \bar{a},\ \bar{b}\right] = 0.$$

Primită la 10 iunie 1976

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. M a y e r O., *Études sur les réseaux de Myller*. Ann. sc. Univ. Jassy, **14**, *3 — 4*, 169 — 204 (1926/27) sau M a y e r O., *Opera matematică*, vol. **I**, lucr. nr. 9.
2. R u s c i o r Şt., *Sur une classification affine des hypersurfaces réglées dans un E_4*. Acad. r. Belgique, Bull. Cl. Sc. Bruxelles (5), **50**, 309—314 (1964).
3. M a y e r O., *Familii R de curbe pe suprafeţe riglate în spaţiul euclidian*. St. şi cerc. şt. Acad. R.P.R. Fil. Iaşi, Ser.I, **5**, *3—4*, 13—47 (1954) sau M a y e r O., *Opera matematică*, vol. **II**, lucr. nr. 33.
4. R u s c i o r Şt., *Sur le problème de la correspondance par parallélisme entre les variétés réglées dans S_n*. Ann. Mat. pura ed appl. Bologna (4), **80 (152)**, 153—166 (1968).

RÉSEAUX DE MYLLER SUR LES VARIÉTÉS RÉGLÉES DANS S_4

(Résumé)

Dans cette note on détermine des réseaux de Myller M, étendues sur les variétés réglées dans S_4 euclidien, et on met en évidence quelques propriétés de ces réseaux.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.D. 512.9 ; 517.9

VECTORES ALEATORIOS ISOTROPOS EN EL ESPACIO DE HILBERT Y EN LOS ESPACIOS EUCLIDEOS

POR

DARIO MARAVALL CASESNOVES

En 1958 (vease [1]) he investigado con bastante profundidad y detalle las propiedades de los vectores aleatorios isótropos en espacios euclideos de n dimensiones, estableciendo diversas relaciones entre transformaciones integrales de Fourier, Laplace y Hankel, resolviendo distintos tipos de ecuaciones integrales y obteniendo de este modo propiedades de funciones trascendentes superiores. En 1974 [3] he extendido mis investigaciones sobre vectores aleatorios isótropos al espacio de Hilbert, considerado como límite de un espacio euclideo cuando el número de dimensiones tiende a infinito y la suma de los cuadrados de las coordenadas de cualquier punto es una serie convergente. Vamos ahora a recordar brevemente algunos de los resultados que ya había obtenido y a exponer algunos nuevos.

Llamo vector aleatorio isótropo de un espacio euclídeo de n dimensiones a una variable aleatoria (v.a.) enevariante, que suponemos absolutamente continua y cuya función de frecuencia (f. f.) es de simetría esférica :

$$f(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}). \tag{1}$$

Si pasamos a coordenadas esféricas, siendo r el radio vector :

$$r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \tag{2}$$

el elemento diferencial de volumen en coordenadas cartesianas :

$$\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{3}$$

se transforma en coordenadas esféricas en el :

$$r^{n-1}\mathrm{d}r\ \mathrm{d}S_n, \tag{4}$$

siendo $\mathrm{d}S_n$ el elemento diferencial de area de la esfera de radio unidad del espacio euclideo de n dimensiones. Por tanto la f. f. de la distribución marginal de r : $h(r)$ vale :

$$h(r) = r^{n-1} f(r)\, S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} f(r), \tag{5}$$

habida cuenta del valor del area de la esfera de radio la unidad (7). La función caracteristica (f. c.) $\varphi(t)$ de la proyección del vector aleatorio isótropo sobre un eje de coordenadas, cualquiera es :

$$\varphi(t) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\,tr\cos\theta}\, \text{sen}^{\,n-2}\,\theta\, f(r) r^{n-1} S_{n-1}\, dr, \tag{6}$$

siendo S_{n-1} el area de la esfera de radio la unidad en un espacio euclideo de n dimensiones, que vale :

$$S_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{7}$$

y de (6) teniendo en cuenta (5), (7), y la definición de la función J de Bessel se obtiene :

$$\varphi(t) = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{t^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^{\infty} \frac{h(r)}{r^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(tr)\, dr, \tag{8}$$

integral que es invertible, y de (8) se sigue que :

$$h(r) = \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(tr)\varphi(t)\, dt. \tag{9}$$

Las (8) y (9) establecen las relaciones entre la f. f. de la distribución marginal del módulo de un vector aleatorio isótropo y la f. c. de su proyección sobre un eje, en un espacio euclídeo de n dimensiones. Para el caso en que las distribuciones de probabilidad de los vectores aleatorios isótropos son discretas en vez de continuas remitimos al lector a mi libro [4].

La f.f. $g(x)$ de la proyección del vector aleatorio isótropo sopre un eje, la v.a. cuya f.c. es (8), por ser una función simétrica en x vale :

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos tx\, dt \tag{10}$$

y como :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(tr)}{t^{\frac{n}{2}-1}} \cos tx\, dt = \frac{r^{\frac{n-4}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \qquad x \leqslant r, \tag{11}$$

de (10) y (11) se sigue que :

$$(12)\quad g(x)=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_x^\infty r(r^2-x^2)^{\frac{n-3}{2}}f(r)\,dr=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty\frac{h(r)}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}dx.$$

Las fórmulas (8), (9), y (12), establecen entre las tres funciones $h(r)$, $\varphi(t)$ y $g(x)$ unas correspondencias de la forma indicada en la figura que sigue :

$$(13)\qquad \begin{array}{ccc} \varphi(t) & \leftrightarrows & h(r) \\ \updownarrow & \swarrow & \\ g(x) & & \end{array}$$

las cuales permiten obtener múltiples propiedades de funciones transcendentes superiores, así como resolver varios tipos de ecuaciones integrales. Por ejemplo (vease [1]) la (12), mediante un oportuno cambio de variable se transforma en una ecuación integral de nucleo cerrado, que puede resolverse aplicando el producto de convolución de la transformada de Laplace.

Como la proyección de un vector aleatorio isótropo de un espacio euclideo de n dimensiones sobre un subespacio de m dimensiones ($m < n$) es tambié isótropo, las fórmulas (8), (9) y (12), cuando en ellas se sustituye o no n por m, permiten establecer correspondencias entre las f.f. $h(r, n)$, $h(r, m)$ de las distribuciones marginales de los módulos de vectores aleatorios isótropos en un espacio euclídeo de n dimensiones y su proyección sobre uno de sus subespacios de m dimensiones, a través de las f.f. y f.c. de sus proyecciones sobre un eje. Las cuales se pueden indicar asi :

$$(14)\qquad \begin{array}{ccccc} & & g(x) & & \\ h(r\,;n) & \leftrightarrows & & \leftrightarrows & h(r\,;m). \\ & & \varphi(t) & & \end{array}$$

Cuando se pasa al espacio de Hilbert, n vale infinito, y vamos a ver como se puede dar sentido a las fórmulas antes establecidas, método que es también aplicable a otras muchas fórmulas de la Geometría Integral. Por las propiedades de las funciones de Bessel se tiene que :

$$(15)\qquad \lim_{n\to\infty}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{n}{2}-1}J_{\frac{n}{2}-1}(x)=1,$$

y de aquí la (8) da origen a :

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty}\varphi(t)=\int_0^\infty h(r)dr=1,$$

que expresa que *la proyección de un vector aleatorio isótropo sobre un eje en un espacio de Hilbert converge en probabilidad al origen de coordenadas, o a cero que es lo mismo.* Si multiplicamos la anterior proyección por $\sqrt{n}$, siendo n el número de dimensiones del espacio, y hacemos tender n a infinito (caso del espacio de Hilbert), se obtiene a partir de (8) y de que :

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{x\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(x\sqrt{n}) = 2^{-\frac{x^2}{2}} \tag{17}$$

la notable fórmula:

$$\psi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t\sqrt{n}) = \int_0^\infty h(r) e^{-\frac{t^2r^2}{2}}\, dr\,; \tag{18}$$

(vease la demostración completa en mi libro [3]). A (18) le corresponde la f.f. (la anterior es una f.c.) dada por:

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-itx}\psi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h(r)dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,tx-\frac{t^2r^2}{2}}\, dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{h(r)}{r} e^{-\frac{x^2}{2r^2}}\, dr. \tag{19}$$

Vamos a obtener ahora el resultado (19), mediante un procedimiento distinto. Multiplicar por $\sqrt{n}$ la proyección del vector aleatorio isótropo sobre un eje, es pasar a una v.a. cuya f.f. se obtiene sustituyendo x por $x/\sqrt{n}$, en (12) y dividir además esta por $\sqrt{n}$, se tiene pues:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} g\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{x}{\sqrt{n}}}^\infty \frac{h(r)}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2 n}\right)^{\frac{n-3}{2}} dr \tag{20}$$

y haciendo tender n a infinito se obtiene:

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} g\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2r^2}} \frac{h(r)}{r}\, dr \tag{21}$$

y teniendo en cuenta la fórmula de Stirling es:

$$\begin{cases} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)! = \left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}+1}\sqrt{\pi(n-2)}, \\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\right)! = \left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} e^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}\sqrt{\pi(n-3)}, \end{cases} \tag{22}$$

y por otra parte es también:

$$(23)\qquad \begin{cases} \left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-1}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-1}, \\ \left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}e^{-3/2} \end{cases}$$

y de aqui:

$$(24)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{n}{2}}$$

luego:

$$(25)\qquad k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\frac{h(r)}{r}e^{-\frac{x^2}{2r^2}}\,dr,$$

que coincide con la (19). Obsérvese como mediante oportunos cambios de variable, las (18) y (25) se convierten en transformadas de Laplace.

Si hacemos:

$$(26)\qquad h(r)=\delta(r-a)$$

obtenemos el caso de un punto repartido uniformemente al azar sobre una esfera de radio a, la delta es la de Dirac. Si en (8) efectuamos la sustitución (26) se obtiene la f.c. de la proyección sobre un diametro de un punto repartido uniformemente al azar sobre una esfera de radio a en espacio euclideo de n dimensiones, que es:

$$(27)\qquad \frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(at)^{\frac{n}{2}-1}}J_{\frac{n}{2}-1}(at).$$

Si ahora en (9) sustituimos $\varphi(t)$ por (27), como $h(r)$ vale (26) se obtiene una representación integral de la delta de Dirac que es:

$$(28)\qquad \delta(r-a)=\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n}{2}}a\int_0^{\infty}t\,J_{\frac{n}{2}-1}(tr)\,J_{\frac{n}{2}-1}(at)\,dt.$$

Si en el último miembro de (12) se efectua la sustitución (26), se obtiene la f.f.

$$(29)\qquad \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{n-3}{2}},$$

que cuando n tiende a infinito converge en el sentido de las distribuciones a la delta de Dirac $\delta(x)$.

Vemos que también en el espacio de Hilbert entre la f.f. de la distribución marginal del módulo de un vector aleatorio isótropo $h(r)$, y las f.c. $\psi(t)$ y f.f. $k(x)$ de la v.a. que ahora sustituye a la proyección del antedicho vector sobre un eje (que es una v.a. infinitesimal), sustitución que se ha obtenido multiplicando dicha proyección por $\sqrt{n}$ y haciendo tender n a infinito (el espacio euclídeo al de Hilbert), existe una correspondencia dada por las fórmulas (18) y (25), que son invertibles respecto a $h(r)$, porque mediante un oportuno cambio de variable se convierten en transformadas de Laplace. La relación entre $\psi(t)$ y $k(x)$ es la transformada de Fourier. Por tanto existe una correspondencia de la forma :

$$\begin{array}{ccc} \psi(t) & \leftrightarrows & h(r) \\ \Updownarrow & \swarrow & \\ k(x) & & \end{array} \qquad 30)$$

En mi libro [5] $k(x)$ pueden verse dos demostraciones distintas de como la transformación de Fourier conserva la simetría esférica, y la resolución de varios problemas de vectores aleatoris isótropos en el plano y en el espacio ordinario de tres dimensiones.

Si en (18) y (25) hacemos la sustitución (26) se obtienen la f.c. y la f.f. de la ley normal o de Gauss.

Ricevudo 27 II 1976

Escuola Tecnica Superior de Ingenieros Agronomos, Madrid, Espaňa

BIBLIOGRAFIA

1. Maravall D., *Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocásticos.* Revista de la Real Academia de Ciencias, Madrid (1958).
2. Maravall D., *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos.* Edidorial Paraninfo, Madrid, 1974.
3. Maravall D., *Lineas de investigación en los procesos estocásticos y el movimiento browniano.* Instituto de Espaňa, Madrid, 1975.
4. Maravall D., de Castro A., *Métodos Matemáticos para la Ingeniería.* Editorial Dossat, Madrid, 1961.
5. Maravall D., Soler J. M., *Estadística teórica y aplicada.* Universidad Nacional de Educacion a Distancia, Madrid, 1976.

VECTORI ALEATORI IZOTROPI ÎN SPAŢIUL HILBERT ŞI ÎN SPAŢII EUCLIDIENE

(Rezumat)

Se stabileşte corespondenţa (14) care dă legătură dintre funcţiile de frecvenţă ale repartiţiilor marginale ale modulilor unui vector izotrop într-un spaţiu enclidian n-dimensional şi proiecţia sa pe unul din subspaţii. De asemenea se demonstrează că într-un spaţiu Hilbert proiecţia unui vector aleator izotrop converge în probabilitate spre originea coordonatelor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 512.99 : 517.942.1

ON SOME FUNCTIONS ON ALGEBRAS

BY
ALFRED BRAIER

1. In the previous works [1]...[4], we have introduced exponential, trigonometric hyperbolic and other functions on an commutative and associative algebra A_n, with unity element w^0, on the real field R. Let $F(xw)$ be the element of A_n put in correspondence with xw ($w \in A_n$), for a fixed $x \in R$; then if for any w

$$\frac{d}{dx}F(xw) = wF(xw), \quad \frac{d^2}{dx^2}F(xw) = \mp w^2F(xw), \quad \frac{d^4}{dx^4}F(xw) = -w^4F(xw), \tag{1}$$

one obtains respectively the exponential function, the trigonometric, hyperbolic as well as the Krylloff function on A_n.

Let remind that [2]

$$\begin{cases} \cos(xw) = \dfrac{1}{2}[\exp(xpw) + \exp(-xpw)], \\ \\ \sin(xw) = \dfrac{1}{2p}[\exp(xpw) - \exp(-xpw)], \end{cases} \quad \text{with} \quad p^2 = -w^0, \tag{2}$$

and also

$$\begin{cases} \cos^2(xw) + \sin^2(xw) = w^0, \\ \cos(xw_1 + yw_2) = \cos(xw_1)\cos(yw_2) - \sin(xw_1)\sin(yw_2), \\ \sin(xw_1 + yw_2) = \sin(xw_1)\cos(yw_2) + \cos(xw_1)\sin(yw_2). \end{cases} \tag{3}$$

In this paper we shall introduce functions like (1) on direct sums of algebras and give an application to a particular algebra which occur in the symbolic representation of an important amplitude modulated signal[5], [6].

2. Let be an algebra $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_s$, direct sum of a number of s algebras, associative, commutative and with unity element. An element $w \in A$ can be written as

$$w = \sum_{k=1}^{s} w_k E_k ; \qquad w_k = \sum_{\alpha=1}^{N_k} a_\alpha^{(k)} e_\alpha^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, s, \tag{4}$$

where $w_k \in A_k$ is the element of algebra A_k of order N_k; $e_\alpha^{(k)}$ and $a_\alpha^{(k)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N_k$ being respectively the basis of A_k and the components of w_k. Also

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathbf{E}_k\mathbf{E}_l = \mathbf{E}_l\mathbf{E}_k = 0, & k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \ldots, s; \\ \mathbf{E}_k^2 = 0, & k = 1, 2, \ldots, s. \end{cases}$$

If w_k^0 is the element of A_k, then $w^0 = \sum_{k=1}^{s} w_k^0 \mathbf{E}_k$ is the unity element of A.

Let $F(xw)$ be the element of A which we put in correspondence with xw ($w \in A$), for a fixed $x \in R$. We impose now that for any w

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} F(xw) = \pm\, w^n F(xw).$$

Taking into account (4), (5) and that $F(xw) = \sum_{k=1}^{s} f_k \mathbf{E}_k$, we get

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\mathrm{d}^n f_k}{\mathrm{d}x^n} \mathbf{E}_k = \pm \left(\sum_{k=1}^{s} w_k^n \mathbf{E}_k \right) \left(\sum_{k=1}^{s} f_k \mathbf{E}_k \right) = \pm \sum_{k=1}^{s} w_k^n f_k \mathbf{E}_k,$$

i.e. finally

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{d}^n f_k}{\mathrm{d}x^n} = \pm\, w_k^n f_k, \qquad \text{where} \qquad f_k = \sum_{\alpha=1}^{N_k} \varphi_\alpha^{(k)}(x)\, \mathrm{e}_\alpha^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

We conclude that the finding of the solution for (6) in the direct sum of algebras A, reduces to the solving of an identical equation in each of the algebras involved in the direct sum. The functions $\varphi_\alpha^{(k)}(x)$ intervening in each f_k depend obviously on the components $a_\alpha^{(k)}$ of element w_k (4_2) which occur in (7_1).

If, for instance, we consider the first two equations (1), obtained as particular cases of (6), we get exponential, trigonometric and hyperbolic functions on a direct sum of algebras, namely

$$(8)\qquad \begin{cases} \exp\left(x \sum_{k=1}^{s} w_k \mathbf{E}_k \right) = \sum_{k=1}^{s} [\exp(xw_k)]\, \mathbf{E}_k, \\ \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(x \sum_{k=1}^{s} w_k \mathbf{E}_k \right) = \sum_{k=1}^{s} \left[\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (xw_k) \right] \mathbf{E}_k \ldots \end{cases}$$

3. We shall now consider the direct sum of the complex algebra A_2 and an algebra of order four A_4, direct product of two complex algebras. An element of the resulting algebra A_6, namely

$$w = w_1\mathbf{E}_1 + w_2\mathbf{E}_2, \qquad \mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_2^2 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = 0;$$

$$(9)\qquad \begin{cases} w_1 = a_1 + a_2\mathrm{j}, & \mathrm{j}^2 = -1; \\ w_2 = a_3 + a_4\mathrm{i} + a_5\mathrm{j} + a_6\mathrm{ij}, & \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad (\mathrm{ij})^2 = (\mathrm{ji})^2 = 1 \end{cases}$$

is capable to represent symbolically some important amplitude modulated inputs in dynamic systems [1], [5], [6], like

$$f(t) = A[1 + \mu \sin(pt + \psi)]\, \mathrm{e}^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

i) The exponential function on A_6 is according to (8_1)

$$\exp(xw) = \exp(xw_1)\,E_1 + \exp(xw_2)\,E_2, \tag{10}$$

with

$$\begin{cases} \exp(xw_1) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\,j, \\ \exp(xw_2) = \varphi_3(x) + \varphi_4(x)\,i + \varphi_5(x)\,j + \varphi_6(x)\,ij. \end{cases} \tag{11}$$

Equation (1_1) gives the system

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \varphi_3' \\ \varphi_4' \\ \varphi_5' \\ \varphi_6' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & -a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & -a_6 & -a_5 \\ 0 & 0 & a_5 & -a_6 & a_3 & -a_4 \\ 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

or

$$\|\varphi'\| = \|A\| \cdot \|\varphi\|. \tag{12'}$$

On the other hand

$$\exp(xw_1) = \exp(a_1x)\exp(ja_2x) = e^{a_1x}(\cos a_2x + j \sin a_2x),$$

$$\exp(xw_2) = \exp(a_3x)\exp(ia_4x)\exp(ja_5x)\exp(ija_6x) =$$

$$= e^{a_3x}(\cos a_4x + i \sin a_4x)(\cos a_5x + j \sin a_5x)(\cosh a_6x + ij \sinh a_6x).$$

We obtain

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{a_1x}\cos a_2x, \qquad \varphi_2(x) = e^{a_1x}\sin a_2x, \\ \varphi_3(x) = e^{a_3x}(\cos a_4x \cos a_5x \cosh a_6x + \sin a_4x \sin a_5x \sinh a_6x), \\ \varphi_4(x) = e^{a_3x}(\sin a_4x \cos a_5x \cosh a_6x - \cos a_4x \sin a_5x \sinh a_6x), \\ \varphi_5(x) = e^{a_3x}(\cos a_4x \sin a_5x \cosh a_6x - \sin a_4x \cos a_5x \sinh a_6x), \\ \varphi_6(x) = e^{a_3x}(\sin a_4x \sin a_5x \cosh a_6x + \cos a_4x \cos a_5x \sinh a_6x). \end{cases} \tag{13}$$

The function (11_1) is well known and studyied in the theory of functions of a complex variable. The other is the correspondent in a theory of functions of the hypercomplex variable (9_2), being related to the system (12_2) of linear differential equations.

Using the fact that

$$\exp[(x + y)w] = \exp(xw)\exp(yw)$$

we can get immediately

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi_3(x+y) = \varphi_3(x)\varphi_3(y) - \varphi_4(x)\varphi_4(y) - \varphi_5(x)\varphi_5(y) + \varphi_6(x)\varphi_6(y), \\ \varphi_4(x+y) = \varphi_3(x)\varphi_4(y) + \varphi_4(x)\varphi_3(y) - \varphi_5(x)\varphi_6(y) - \varphi_6(x)\varphi_5(y), \\ \varphi_5(x+y) = \varphi_3(x)\varphi_5(y) - \varphi_4(x)\varphi_6(y) + \varphi_5(x)\varphi_3(y) - \varphi_6(x)\varphi_4(y), \\ \varphi_6(x+y) = \varphi_3(x)\varphi_6(y) + \varphi_4(x)\varphi_5(y) + \varphi_5(x)\varphi_4(y) + \varphi_6(x)\varphi_3(y). \end{cases}$$

Functions $\varphi_3, \ldots, \varphi_6$ may be of use in the Strenght of Materials.

ii) The trigonometric functions on A_6 are according to (8_2)

$$\begin{cases} \cos(xw) = \cos(xw_1)\,\mathrm{E}_1 + \cos(xw_2)\,\mathrm{E}_2, \\ \sin(xw) = \sin(xw_1)\,\mathrm{E}_1 + \sin(xw_2)\,\mathrm{E}_2, \end{cases}$$

with

$$(15)\qquad \begin{cases} \cos(xw_1) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)\,\mathrm{j}, \quad \sin(xw_1) = \Upsilon_1(x) + \Upsilon_2(x)\,\mathrm{j}, \\ \cos(xw_2) = \Phi_3(x) + \Phi_4(x)\,\mathrm{i} + \Phi_5(x)\,\mathrm{j} + \Phi_6(x)\,\mathrm{ij}, \\ \sin(xw_2) = \Upsilon_3(x) + \Upsilon_4(x)\,\mathrm{i} + \Upsilon_5(x)\,\mathrm{j} + \Upsilon_6(x)\,\mathrm{ij}. \end{cases}$$

Equation (1_2), namely $F''(xw) = -w^2F(xw)$, gives for the functions $\Phi_1, \ldots, \Phi_6, \Upsilon_1, \ldots \Upsilon_6$ the systems

$$(16)\qquad \begin{cases} \|\Phi'\| = -\|A\| \cdot \|\Upsilon\|, \\ \|\Upsilon'\| = \quad \|A\| \cdot \|\Phi\|, \end{cases} \qquad \text{or} \qquad \begin{cases} \|\Phi''\| = -\|A\|^2 \cdot \|\Phi\|, \\ \|\Upsilon''\| = -\|A\|^2 \cdot \|\Upsilon\|, \end{cases}$$

where $\|A\|$ is the matrix involved in (12) or (12′). The initial conditions are $\cos 0 = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$ and $\sin 0 = 0$.

In order to obtain the functions $\Phi(x)$ and $\Upsilon(x)$ we shall utilise (2). For the complex algebra A_2 (9_1), relations (2) are well known consequences of Euler's formula ($\mathrm{j}^2 = -1$) and the results are usual in the theory of functions of a complex variable, namely

$$(17)\qquad \begin{cases} \Phi_1(x) = \quad \cos a_1x \cosh a_2x, \\ \Phi_2(x) = -\sin a_1x \sinh a_2x; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Upsilon_1(x) = \sin a_1x \cosh a_2x, \\ \Upsilon_2(x) = \cos a_1x \sinh a_2x. \end{cases}$$

For the direct product of complex algebras A_4 (9_2) we apply also (2), taking into account that in this algebra, two different elements verify the condition $p^2 = -w^0$, namely i and j ($\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1$). Both lead to the same result. First we calculate

$$\exp(xiw_2) = \exp(a_3x\mathrm{i} - a_4x + a_5\mathrm{ij} - a_6\mathrm{j}) =$$

$$= \mathrm{e}^{-a_4x}(\cos a_3x + \mathrm{i}\sin a_3x)(\cosh a_5x + \mathrm{ij}\sinh a_5x)(\cos a_6x - \mathrm{j}\sin a_6x)$$

and also $\exp(-xiw_2)$. Then applying (2) we get

$$(18)\qquad \begin{cases} \Phi_3(x) = \cos a_3x \cosh a_4x \cosh a_5x \cos a_6x + \sin a_3x \sinh a_4x \sinh a_5x \sin a_6x, \\ \Phi_4(x) = \cos a_3x \cosh a_4x \sinh a_5x \sin a_6x - \sin a_3x \sinh a_4x \cosh a_5x \cos a_6x, \\ \Phi_5(x) = \cos a_3x \sinh a_4x \cosh a_5x \sin a_6x - \sin a_3x \cosh a_4x \sinh a_5x \cos a_6x, \\ \Phi_6(x) = -\cos a_3x \sinh a_4x \sinh a_5x \cos a_6x - \sin a_3x \cosh a_4x \cosh a_5x \sin a_6x \end{cases}$$

and also

$$(19)\quad \begin{cases} \Psi_3(x)=\sin a_3x\cosh a_4x\cosh a_5x\cos a_6x-\cos a_3x\sinh a_4x\sinh a_5x\sin a_6x, \\ \Psi_4(x)=\sin a_3x\cosh a_4x\sinh a_5x\sin a_6x+\cos a_3x\sinh a_4x\cosh a_5x\cos a_6x, \\ \Psi_5(x)=\sin a_3x\sinh a_4x\cosh a_5x\sin a_6x+\cos a_3x\cosh a_4x\sinh a_5x\cos a_6x, \\ \Psi_6(x)=-\sin a_3x\sinh a_4x\sinh a_5x\cos a_6x+\cos a_3x\cosh a_4x\cosh a_5x\sin a_6x. \end{cases}$$

The first relation (3) gives in this algebra (where $w^0 = 1$) a lot of connections between the functions $\Phi_3, \ldots, \Phi_6, \Psi_3, \ldots, \Psi_6$ (see (15)), namely

$$(20)\quad \begin{cases} \Phi_3^2(x) - \Phi_4^2(x) - \Phi_5^2(x) + \Phi_6^2(x) + \Psi_3^2(x) - \Psi_4^2(x) - \Psi_5^2(x) + \Psi_6^2(x) = 1, \\ \Phi_3(x)\Phi_4(x) - \Phi_5(x)\Phi_6(x) + \Psi_3(x)\Psi_4(x) - \Psi_5(x)\Psi_6(x) = 0, \\ \Phi_3(x)\Phi_5(x) - \Phi_4(x)\Phi_6(x) + \Psi_3(x)\Psi_5(x) - \Psi_4(x)\Psi_6(x) = 0, \\ \Phi_3(x)\Phi_6(x) + \Phi_4(x)\Phi_5(x) + \Psi_3(x)\Psi_6(x) + \Psi_4(x)\Psi_5(x) = 0. \end{cases}$$

Also, taking into account the other relations (3), where $w_1 = w_2 \in A_4$ and (15) we can obtain $\Phi(x + y)$ and $\Psi(x + y)$ expressed by means of $\Phi(x)$, $\Phi(y)$, $\Psi(x)$, $\Psi(y)$. We give only two of them:

$$\begin{aligned} \Phi_3(x+y) &= \Phi_3(x)\Phi_3(y) - \Phi_4(x)\Phi_4(y) - \Phi_5(x)\Phi_5(y) + \Phi_6(x)\Phi_6(y) - \\ &\quad - \Psi_3(x)\Psi_3(y) + \Psi_4(x)\Psi_4(y) + \Psi_5(x)\Psi_5(y) - \Psi_6(x)\Psi_6(y), \\ \Psi_6(x+y) &= \Psi_3(x)\Phi_6(y) + \Psi_4(x)\Phi_5(y) + \Psi_5(x)\Phi_4(y) + \Psi_6(x)\Phi_3(y) + \\ &\quad + \Phi_3(x)\Psi_6(y) + \Phi_4(x)\Psi_5(y) + \Phi_5(x)\Psi_4(y) + \Phi_6(x)\Psi_3(y). \end{aligned}$$

Received September 1, 1976

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *New Algebraic Method in Dynamic Systems.* Int. Centre for Mech. Sci., Udine, 1972.
2. Braier A., *Exponential Functions on Algebras and Ordinary Linear Differential Equations.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVI (XX)**, *1—2*, s. I, 13—20 (1970).
3. Braier A., *Trigonometric and Hyperbolic Funtions on Algebras and Formulas of Euler's Type.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVI (XX)**, *3—4*, s. I, 37—46 (1970).
4. Braier A., *Kryloff Functions on Algebras.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVIII (XXII)**, *1—2*, s. I, 47—53 (1972).
5. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (III) *General Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII (XXI)**, *3—4*, s. IV, 19—28 (1971).
6. Braier A., Neagu S., Savitescu Gh., *Frequency Response of Second Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (III) *General Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, **XXII (XXVI)**, *3—4*, s. IV (1976).

ASUPRA UNOR FUNCȚII PE ALGEBRE

(Rezumat)

Se introduc funcții de tipul (6) pe sume directe de algebre comutative, asociative și cu unitate pe corpul real. Ca aplicație se c onsideră funcții exponențiale și trigonometrice pe algebra (9), care intervine în reprezentarea simbolică a unor semnale modulate [5].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

D. C. 519.5

ON THE COVERINGS OF FIBRATIONS (I)

BY

I. POP and FULGA POP

The aim of this paper is to generalize some results of J. C. Becker and D. H. Gottlieb, on the coverings of fibrations [1].

Let $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ and $\tilde{F} \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{p}} \tilde{B}$ be two fibrations (Hurewicz fibrations or locally trivial bundles) and $\pi : \tilde{F} \longrightarrow F$, $\pi' : \tilde{B} \longrightarrow B$ two covering spaces.

If there exists a covering map $\tilde{\pi} : \tilde{E} \longrightarrow E$ such that we have the commutative diagram

(1)
$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{B} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}'} \\ F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

then we say that $\tilde{p}$ is a π'-covering fibration of the fibration p, extending π.

In the paper cited above the authors give the necessary and sufficient conditions under which one can find a covering fibration of a Hurewicz fibration p in the case $\tilde{B} = B$, $\pi' = 1_B$ and $\tilde{F}$ is an universal covering space.

In this paper we find some sufficient conditions under which there exists a π'-covering fibration of a Hurewicz fibration, extending a non-universal covering space π, in the case when π' is any covering map. We consider also the case of locally trivial bundles over polyhedrons.

In the second part of this paper some consequences and applications are given.

Theorem 1. *Let $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ be a Hurewicz fibration with F and E connected, locally path connected, and semi-locally 1-connected spaces.*

Let $\pi : \tilde{F} \longrightarrow F$ and $\pi' : \tilde{B} \longrightarrow B$ be two connected covering spaces.

The following conditions are sufficient in order there exists a π'-covering fibration of p, extending π:

a) $i_* : \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E)$ *is injective,*

b) *there exists a homomorphism* $h : \pi_1(\tilde{B}) \longrightarrow \pi_1(E)$ *such that* $p_* h = \pi'_* : \pi_1(\tilde{B}) \longrightarrow \pi_1(B)$,

c) *the subgroups* $H_1 = i_* \pi_*(\pi_1(\tilde{F}))$ *and* $H_2 = h(\pi_1(\tilde{B}))$ *of the group* $\pi_1(E)$ *have the property* $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$.

If $\tilde{F}$ *is an universal covering space, then, the above conditions are also necessary.*

P r o o f. We consider the subgroup $H = H_1 \cdot H_2$ of the group $\pi_1(E)$. Since E is a connected, locally path connected, and semi-locally 1-connected space, there exists a covering map $\tilde{\pi} : \tilde{E} \longrightarrow E$ such that $\tilde{\pi}_*(\pi_1(\tilde{E})) = H$.

Let us consider the diagram :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E & \xrightarrow{p} & B \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \pi'} \\ & & & & \tilde{B} \end{array}$$

We have $(p\tilde{\pi})_* (\pi_1(\tilde{E})) = p_* \tilde{\pi}_* (\pi_1(\tilde{E})) = p_* (H) = p_* H_1 \cdot p_* H_2$. But $p_* H_1 = p_* \, i_* \pi_* (\pi_1(\tilde{F})) = \{1\}$, since $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} p_*$. Hence, $(p\tilde{\pi})_* (\pi_1(\tilde{E})) = p_* H_2 = p_* h(\pi_1(\tilde{B})) = \pi'_* (\pi_1(\tilde{B}))$. Since $\tilde{E}$ is a connected and locally path connected space, (it is a factor space of a path connected space [2, Theorem 13, p. 109] so that $\tilde{E}$ is locally homeomorphic with E), and π' has the homotopy covering property, there exists a continuous map $\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{B}$ such that $p \circ \tilde{\pi} = \pi' \circ \tilde{p}$.

We shall prove that $\tilde{p}$ is a Hurewicz fibration. For this, let $f : X \longrightarrow \tilde{E}$ be a continuous map, with X any topological space, and $F : X \times I \longrightarrow \tilde{B}$ a homotopy of the map $\tilde{p} \circ f$, that is $F(x, 0) = \tilde{p} f(x)$, $x \in X$. We consider the diagram :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ {\scriptstyle \tilde{\pi}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi'} \\ \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{B} \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F} \\ X & & X \times I \end{array}$$

Then $\pi' F(x, 0) = \pi' \tilde{p} f(x) = p \tilde{\pi} f(x)$ and, since p is a Hurewicz fibration, there exists a homotopy $G : X \times I \longrightarrow E$, such that $G(x, 0) = \tilde{\pi} f(x)$, for every $x \in X$, and $p\, G(x, t) = \pi' F(x, t)$, for $(x, t) \in X \times I$. But $\tilde{\pi}$ has the homotopy covering property and, therefore there exists $H : X \times I \longrightarrow \tilde{E}$, with $H(x, 0) = f(x)$, $x \in X$, and $\tilde{\pi} H(x, t) = G(x, t)$, for $(x, t) \in X \times I$. Let $x \in X$ be a fixed point. We have $p \tilde{\pi} H(x, t) = p G(x, t) = \pi' F(x, t)$, that is $\pi' \tilde{p} H(x, t) = \pi' F(x, t)$. Moreover, $\tilde{p} H(x, 0) = \tilde{p} f(x) = F(x, 0)$. Since π' has

unique path lifting, it follows that $\tilde{p}H(x, t) = F(x, t)$, for every $(x, t) \in X \times I$ Therefore $\tilde{p}$ is a Hurewicz fibration.

Now, let F' be the fibre of this fibration. We have the commutative diagram :

$$\begin{array}{ccccc} F' & \xrightarrow{i'} & \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{B} \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

where $\bar{\pi}$ is the restriction of $\tilde{\pi}$.

We show that $\bar{\pi}$ is a Hurewicz fibration. Let $f : X \longrightarrow F' = \tilde{p}^{-1}(\tilde{b})$, be a continuous map, where $\tilde{b} \in \tilde{B}$ and X is any topological space and let $H : X \times I \longrightarrow F = p^{-1}(b)$ be a homotopy of $\bar{\pi} \circ f$, that is $b = \pi'(\tilde{b})$ and $H(x, 0) = \bar{\pi}f(x)$, for every $x \in X$. According to the diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E \\ {\scriptstyle i'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ F' & \xrightarrow{\bar{\pi}} & F \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle H} \\ X & & X \times I \end{array}$$

there exists a continuous map $G : X \times I \longrightarrow \tilde{E}$ such that $G(x, 0) = i'f(x) = f(x)$, $x \in X$, and $\tilde{\pi}G(x, t) = H(x, t)$, for $(x, t) \in X \times I$. Then we have $G(x, t) \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{b})$. In fact, $\pi'\tilde{p}G(x, t) = p\tilde{\pi}G(x, t) = pH(x, t) = b = \pi'(\tilde{b})$ and $\tilde{p}G(x, 0) = \tilde{p}f(x) = \tilde{b}$. It follows that $\tilde{p}G(x, t) = \tilde{b}$, for every $(x, t) \in X \times I$. Hence $\bar{\pi}$ is a Hurewicz fibration. Moreover, $\bar{\pi}$ has a discrete fiber. Therefore $\bar{\pi}$ is a Hurewicz fibration with unique path lifting.

Now we show that F' is a path connected space. We have $\tilde{\pi}_*(\pi_1(\tilde{E})) = H_1 \cdot H_2$ and this implies $p_*\tilde{\pi}_*(\pi_1(\tilde{E})) = p_*H_1 \cdot p_*H_2 = p_*\, h\,(\pi_1(\tilde{B})) = \pi'_*(\pi_1(\tilde{B}))$ that is $\pi'_*\tilde{p}_*\,(\pi_1(\tilde{E})) = \pi'_*\,(\pi_1(\tilde{B}))$.

Since π'_* is injective, it follows that $\tilde{p}_*\,(\pi_1(\tilde{E})) = \pi_1(\tilde{B})$. Hence $\tilde{p}_* : \pi_1\,(\tilde{E}) \longrightarrow \pi_1(\tilde{B})$ is an epimorphism and, by the exact homotopy sequence of $\tilde{p}$, we have that F' is a path connected space. The space F' is also a locally path connected space since it is a subspace of $\tilde{E}$.

As F is locally path connected and semi-locally 1-connected space, it follows [2, Theorem 10, p. 105] that $\bar{\pi} : F' \longrightarrow F$ is a covering map. We prove that this covering map is equivalent with $\pi : \tilde{F} \longrightarrow F$. For this it will be sufficient to prove that $\bar{\pi}_*(\pi_1(F')) = \pi_*(\pi_1(\tilde{F}))$ [2, Corollary 3, p. 107].

Let $[\omega'] \in \pi_1(F')$. Then, there exist $[\tilde{\omega}] \in \pi_1(\tilde{F})$ and $[\tilde{\theta}] \in \pi_1(\tilde{B})$ such that $\tilde{\pi}_* i'_*([\omega']) = i_*\pi_*[\tilde{\omega}].\, h[\tilde{\theta}]$. It follows that $i_*\bar{\pi}_*([\omega']) = i_*\pi_*([\tilde{\omega}])\,.\, h([\tilde{\theta}])$ and therefore $p_*(i_*\bar{\pi}_*([\omega'])) = p_*i_*\pi_*([\tilde{\omega}]).\, p_*h([\tilde{\theta}])$, that is $\pi'_*([\tilde{\theta}]) = 1$. But

π'_* is injective and, hence $[\tilde{\theta}] = 1$. Thus $i_*\bar{\pi}_*([\omega']) = i_*\pi_*([\tilde{\omega}])$ such that $\bar{\pi}_*([\omega']) = \pi_*([\tilde{\omega}])$, since i_* is injective. Then we obtain the inclusion

$$(*) \qquad \pi_*(\pi_1(F')) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{F})).$$

According to exact sequence

$$\pi_1(F') \xrightarrow{i_*'} \pi_1(\tilde{E}) \xrightarrow{\tilde{p}_*} \pi_1(\tilde{B})$$

we have Im $i'_* = \text{Ker } \tilde{p}_*$. Let $[\tilde{\omega}] \in \pi_1(\tilde{F})$. Then, there exists $[\tilde{\theta}] \in \pi_1(\tilde{E})$ such that $\tilde{\pi}_*([\tilde{\theta}]) = i_*\pi_*([\tilde{\omega}])$. But $\pi'_*\tilde{p}_*([\tilde{\theta}]) = p_*\tilde{\pi}_*([\tilde{\theta}]) = p_*i_*\pi_*([\tilde{\omega}]) = 1$ and we obtain $\tilde{p}_*([\tilde{\theta}]) = 1$, that is $[\tilde{\theta}] \in \text{Ker } \tilde{p}_*$. It follows that there exists $[\omega'] \in \pi_1(F')$ such that $[\tilde{\theta}] = i'_*([\omega'])$. Therefore, we have $\tilde{\pi}_*i'_*([\omega']) = i_*\pi_*([\tilde{\omega}])$, that is $i_*\bar{\pi}_*([\omega']) = i_*\pi_*([\tilde{\omega}])$. Thus $\pi_*([\tilde{\omega}]) = \pi_*([\omega'])$ and then we obtain the inclusion

$$(**) \qquad \pi_*(\pi_1(\tilde{F})) \subset \bar{\pi}_*(\pi_1(F')).$$

By the inclusions (*) and (**) we have the equality $\pi_*(\pi_1(\tilde{F})) = \pi_*(\pi_1(F'))$ and this proves that $\bar{\pi}$ and π are equivalent.

This finishes the proof of the first part of the Theorem 1.

Now we suppose that there exists a π'-covering fibration of p extending an universal covering $\pi : \tilde{F} \longrightarrow F$. The notations are those of the diagram (1). From the exact ladder associated with this diagram, we have the following commutative diagram :

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(\tilde{B}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \pi_1(\tilde{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'_{*2}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \pi_2(B) & \xrightarrow{d} & \pi_1(F) \end{array}$$

But, $\pi_1(\tilde{F}) = \{1\}$ [2, Corollary 15, p. 112] and π'_{*2} is an isomorphism. Hence d is the trivial homomorphism, that is Im $d = \{1\}$. By the exact homotopy sequence of the fibration p, we have Ker $i_* = \{1\}$. Thus the condition a) is satisfied. Then, we have $\tilde{p}_* : \pi_1(\tilde{E}) \simeq \pi_1(\tilde{B})$. Let $j : \pi_1(\tilde{B}) \longrightarrow \pi_1(\tilde{E})$ be the homomorphism such that $j\tilde{p}_* = 1_{\pi_1(\tilde{E})}$ and $\tilde{p}_* j = 1_{\pi_1(\tilde{B})}$. We obtain $\pi'_*\tilde{p}_*j = \pi'_*$, that is $p_*(\tilde{\pi}_*j) = \pi'_*$. Now, we define $h = \tilde{\pi}_*j : \pi_1(\tilde{B}) \longrightarrow \pi_1(E)$, which satisfies the condition b). The condition c) of the Theorem 1 is trivially satisfied since $H_1 = i_*\pi_*(\pi_1(\tilde{F})) = \{1\}$.

Remarks. 1. If we take in the Theorem 1 : $\tilde{B} = B$, $\pi' = 1_B$ and $\tilde{F}$ an universal covering space of the fibre F, we obtain the Theorem 1 of [1].

2. If $\pi_1(E)$ is an abelian group, then the condition c) is satisfied triviallly.

3. If $\tilde{B}$ is a simple connected space, then the conditions b), c) are satisfied automatically.

Theorem 2. *Let $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ be a locally trivial bundle over the polyhedron B. Let us suppose that F and E are connected, locally path connected and semi-locally 1-connected spaces.*

If $\pi : \tilde{F} \longrightarrow F$ *and* $\pi' : \tilde{B} \longrightarrow B$ *are connected covering maps such that the conditions a), b), c) of the Theorem* 1 *are satisfied, then, there exists a locally trivial bundle which is a* π'*-covering of* p*, extending* π.

Proof. We construct the covering map $\tilde{\pi}: \tilde{E} \longrightarrow E$ just like in the Theorem 1. Then, since B is a paracompact space, it follows [2, Theorem 13, p. 129] that p is a Hurewicz fibration. Hence, we can construct the map $\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{B}$ such that $\pi' \circ \tilde{p} = p \circ \tilde{\pi}$.

A theorem of C. Teleman [3, Theorem 9] shows that the locally trivial bundle p admits a P-connection for a suitable good family of paths P of B, [3]. By the Lemma 1 and the Proposition 8 of [4], it follows that there exists a good family of paths $\tilde{P}$ of $\tilde{B}$ and a $\tilde{P}$-connection of the map $\tilde{p}$. Using the Theorem 2 of [3] it follows that $\tilde{p}$ is a locally trivial bundle.

Further on the proof is the same as in the Theorem 1.

Received December 22, 1975

University „Al. I. Cuza", Jassy
and
Polytechnic Institute, Jassy

REFERENCES

1. Becker J. C., Gottlieb D. H., *Coverings of Fibrations.* Compositio Math., **26** (2), 119–128 (1973).
2. Spanier E. H., *Algebraic Topology.* Mc Graw-Hill, New York,, 1966.
3. Teleman C., *Connections and Bundles* (I–II). Konikl. Nederl. Akad. Van Wetenschappen, Amsterdam; Reprinted from Proceedings, Series A, **72**, *1* and Indag. Math., **31**, *1*, 89–112 (1969).
4. Pop I., Pop F., *On the Covering Spaces of the Vector and Geometric Bundles.* An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, **XXIII** (*1*), 1976.
5. Pop I., *On some Homotopy Lifting and Extension Properties for Sequences of Continuous Maps.* An. Șt. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, **XIX**, *1*, 103–112 (1973).

ASUPRA ACOPERIRILOR SPAȚIILOR FIBRATE

(Rezumat)

Se dau condiții suficiente de existență a unui spațiu de acoperire a unei fibrări Hurewicz care extinde o acoperire oarecare a fibrei tip și este compatibilă cu o acoperire a bazei (teorema 1). Se consideră de asemenea cazul fibrărilor local triviale peste poliedre (teorema 2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D. C. 519.4

GROUPS OBTAINED FROM GROUPS WITH GROUPS OF OPERATORS

BY

GH. COSTOVICI

1. In this paper we derive groups from operator groups for which the operator domains are again groups and by means of homomorphisms. We establish some properties of them and, finally, give several examples.

2. If V is an additive operator group for which the operator domain is the multiplicative group K so that $(v_1 + v_2)k = v_1k + v_2k$, $(vk_1)k_2 = v(k_1k_2)$ and $v1 = v$, $\forall v_1, v_2, v \in V$ and $\forall k_1, k_2, k \in K$, then V will be called, on short, K-group. Note that from the first axiom follow $0k = 0$ and $(-v)k = -(vk)$ and that from the third, $VK = V$. Also $vk = 0 \Rightarrow v = 0$.

3. Theorem 1. *If V_i are K_i-groups, $i = \overline{1, n} \geqslant 2$, and f_i are homomorphisms of V_i into K_{i+1} $i = \overline{1, n}$ [1], and if $f_{i+1}(v_{i+1}f_i(v_i)) = f_{i+1}(v_{i+1})$ $\forall v_{i+1} \in V_{i+1}$ and $\forall v_i \in V_i$, $i = \overline{1, n}$, then we have the following:*

(I) $\Pi V_{i+2} = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_{i+2}); v_{i+2} \in V_{i+2}, i = \overline{1, n}\}$ *becomes group under the operation* $(v_{i+2}) \circ (v'_{i+2}) = (v_{i+2}f_{i+1}(v'_{i+1}) + v'_{i+2})$;

(II) $V'_i \subseteq V_i$ $i = \overline{1, n} \Rightarrow \Pi V'_{i+2}$ *is subgroup of* ΠV_{i+2} *if and only if* V'_{i+1} *is subgroup and* V'_{i+2} *is* $f_{i+1}(V'_{i+1})$ *- subgroup* $i = \overline{1, n}$;

(III) *the set* $V'_{i+2} = \{(0, \ldots, 0, v_{i+2}, 0, \ldots, 0); v_{i+2} \in V_{i+2}\}$ *is a subgroup of* ΠV_{i+2} *and the mapping* p_{i+2} defined by $p_{i+2}(v_{i+2}) = (0, \ldots, 0, v_{i+2}, 0, \ldots, 0)$ *is an isomorphism of* V_{i+2} *onto* V'_{i+2};

(IV) *if* $\Pi V'_{i+2}$ *is subgroup of* ΠV_{i+2} *then the set* $T_{i+2} = \{T_{(v'_{i+2})}; T_{(v'_{i+2})}(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_{i+3}, \ldots, v_n) = (v_1f_n(v'_n) + v'_1, \ldots, v_{i+1}f_i(v'_i) + v'_{i+1}, v_{i+3}f_{i+2}(v'_{i+2}) + v'_{i+3}, \ldots, v_nf_{n-1}(v'_{n-1}) + v'_n)$; $(v'_{i+2}) \in \Pi V'_{i+2}$, $v_j \in V_j$ $j = 1, 2, \ldots, i+1, i+3, \ldots, n\}$ *is a subgroup of the group of all bijective mappings of the set* $V_1 \times \ldots \times V_{i+1} \times V_{i+3} \times \ldots \times V_n$ *on itself*;

(V) *if* $\Pi V'_{i+2}$ *is subgroup of* ΠV_{i+2} *then the mapping* F *defined by* $F(v'_{i+2}) = T_{(v'_{i+2})}$ *is an anti-epimorphism of* $\Pi V'_{i+2}$ *on* T_{i+2} *and if* f_{i+2} *is injective and* $1 \in K_{i+3}$ *is unique with the property* $v1 = v$ $\forall v \in V_{i+3}$ *then* F *is anti-isomorphism*;

(VI) *if* $\Pi V'_{i+2}$ *is normal subgroup of* ΠV_{i+2} *then* V'_i *is normal subgroup of* V_i $i = \overline{1, n}$;

(VII) *if* V_i *are right ordered groups by the positive cones* $P_i \subseteq V_i$ $i = \overline{1, n}$ $-P_i + P_i \subseteq P_i$, $P_i \cap (-P_i) = 0_i$ $i = \overline{1, n}$ *— then* ΠV_{i+2} *becomes right*

[1]) In this paper an index i should always read „i (mod n)".

ordered by the positive cone P defined in the following way; $(v_i) \in (P - \{(0_i)\}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow v_i$ *being the first non-zero component of* (v_i) *we have* $v_i \in (P_i - \{0_i\})$ *and* $\forall p \in (P_1 - \{0_1\})$, $pf_n(v_n) \in (P_1 - \{0_1\})$;

(VIII) *if* K_i *are partially ordered groups by the positive cones* $P_i \subseteq K_i$ $i = \overline{1, n} - P_i \cdot P_i \subseteq P_i$, $P_i \cap (P_i^{-1}) = 1_i$, $kP_ik^{-1} \subseteq P_i \forall k \in K_i$, $i = \overline{1, n}$ — *then the group* ΠV_{i+2} *can be partially ordered by the positive cone P defined in the following way*; $(v_i) \in (P - \{(0_i)\} \Leftrightarrow f_i(v_i)$ *being the first component* $\neq 1_{i+1}$ *of* $(f_i(v_i))$ *we have* $f_i(v_i) \in (P_{i+1} - \{1_{i+1}\})$;

(IX) *if* K_2 *is right ordered by P' and* V_i *are right ordered by* P_i $i = \overline{2, n}$ *then the group* ΠV_{i+2} *can by right ordered by P so defined*: $(v_i) \in (P - -\{(0_i)\}) \Leftrightarrow f_1(v_1) \in (P' - \{1_2\})$ *or* $v_1 = 0_1$ *and* v_i *being the first component* $\neq 0_i$ $i \geqslant 2$, *we have* $v_i \in (P_i - \{0_i\})$;

(X) *if* K_2 *is partially ordered by P',* V_i *are partially ordered by* P_i $i = \overline{2, n}$ $P_{i+1} f_i(V_i) \subseteq P_{i+1}$ $i = \overline{1, n-1}$, *and if* $f_n(P_n) = 1_1$, *then the group* ΠV_{i+2} *is partially ordered by the cone P from* (IX);

(XI) *if f is homomorphism from* V_1 *into the group G right ordered by P',* V_i *are right ordered by* P_i $i = \overline{2, n}$ *and* $f_n(V_n) = 1_1$, *then the group* ΠV_{i+2} *can be right ordered by P where* $(v_i) \in (P - \{(0_i)\}) \Leftrightarrow f(v_1) \in (P' - \{1\})$ *or* $v_1 = 0_1$ *and* v_i *being the first component* $\neq 0_i$, $i \geqslant 2$ *we have* $v_i \in (P_i - \{0_i\})$;

(XII) *if f is homomorphism from* V_1 *into the group G partially ordered by P',* V_i *are partially ordered by* P_i $i = \overline{2, n}$, $f_n(V_n) = 1_1$, *and* $P_{i+1} f_i(V_i) \subseteq P_{i+1}$ $i = \overline{1, n-1}$, *then the group* ΠV_{i+2} *can be partially ordered by the positive cone P from* (XI).

The proof is omitted.

Remark. Since, any group V can be regarded as a K-group where K is the multiplicative group with one element, 1, and the external operation defined by $v1 = v \forall v \in V$ and if in (I) one take the banal homomorphisms, then, ΠV_{i+2} becomes group under the usual operation, $(v_{i+2}) \circ (v'_{i+2}) = (v_{i+2} + + v'_{i+2})$. From this point of view, (I) is a generalization of the direct product of groups.

Theorem 2. *If V is K-group and if f is homomorphism of V into K so that* $f(af(b)) = f(a)$ $\forall a, b \in V$, *then V becomes group under the operation* $v_1 \circ v_2 = v_1 f(v_2) + v_2$ $\forall v_1, v_2 \in V$.

The proof is omitted.

4. The following examples either can be regarded from the point of view of the Theorems 1 and 2 or verified directly.

Example 1. If I is an associative ring with identity, U is the group of the units of I, G is an additive group and f is a homomorphism of G into U, then, $G \times I$ becomes group under the operation $(g_1, i_1) \circ (g_2, i_2) = (g_1 + g_2, i_1 f(g_2) + i_2)$.

Example 2. If $E(G)$ = the ring of all endomorphisms of a commutative group G, $A(G)$ = the group of all automorphisms of G, then, $A \times E$ = group under the operation $(a_1, e_1) \circ (a_2, e_2) = (a_1 a_2, e_1 a_2 + e_2)$.

Example 3. $E(G)$ is the partially ordered ring of all endomorphisms of a directed commutative group G; an endomorphism θ being positive if it maps the positive cone $P(G)$ into itself — according to [3, p. 109]. $A_0(G)$

is the partially ordered group of all 0-automorphisms of G ; an 0-automorphism α being $\geqslant 1$, the identity, if $\alpha(g) \geqslant g \forall g \in P(G)$ — according to [3, p. 21]. Then $A_0 \times E$ is partially ordered group under the operation $(\alpha_1, e_1) \circ (\alpha_2, e_2) = (\alpha_1\alpha_2, e_1\alpha_2 + e_2)$ where $(\alpha, e) \geqslant (1,0) \Leftrightarrow \alpha > 1$ or $\alpha = 1$ and $e \geqslant 0$.

Example 4. C is the complex field. C^* is the multiplicative group of the non-zero complex numbers. We use the notation $|c|^2 = x^2 + y^2$ if $c = x + yi \in C$. Then, $C^* \times C$ is directed group (the positive cone generates the group) under the operation $(c_1, c_2) \circ (c_1', c_2') = (c_1c_1', c_2|c_1'|^2 + c_2')$ and where $(c_1, c_2) \geqslant (1,0)$, $c_2 = x + yi \Leftrightarrow$

a) $|c_1| > 1$ or $c_1 = 1$ and $x > 0$ or $c_1 = 1$, $x = 0$ and $y \geqslant 0$,

b) $|c_1| > 1$ or $c_1 = 1$ and $x \geqslant 0$ and $y \geqslant 0$,

c) $|c_1| > 1$ or $c_1 = 1$, $x \geqslant 0$, $y > 0$ or $c_1 = 1$ and $x = y = 0$,

d) $|c_1| > 1$ or $c_1 = 1$, $x > 0$, $y \geqslant 0$ or $c_1 = 1$ and $x = y = 0$,

e) $|c_1| > 1$ or $c_1 = 1$, $x > 0$, $y > 0$ or $c_1 = 1$ and $x = y = 0$,

f) $|c_1| > 1$ or $c_1 = 1$ and arc c_2 belongs to the closed (or semiclosed or open) interval $[\alpha, \beta]$ where α and β are fixed angles satisfying $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$. We have used [3, p. 16]. If we make the following notations : C_r^* = the multiplicative group of the all non-zero complex rational numbers, R = the real field, R^* = the multiplicative group of the non-zero reals, Q^* = the multiplicative group of the non-zero rationals, C_r = the field of the complex rational numbers, Q = the field of rationals, then, $C_r^* \times C$, $C^* \times R$, $C_r^* \times R$, $R^* \times C$, $Q^* \times C$, $Q^* \times C_r$, $R^* \times R$, $Q^* \times R$, $Q^* \times Q$ are directed subgroups.

Example 5. $C^* \times C$ is right ordered group under the operation $(c_1, c_2) \circ (c_1', c_2') = (c_1c_1', c_2c_1' + c_2')$ and where the order is from the example 4. $C_r^* \times C$, $C_r^* \times C_r$, $R^* \times C$, $R^* \times C_r$, $R^* \times R$, $Q^* \times C$, $Q^* \times C_r$, $Q^* \times Q$ are right ordered subgroups.

Example 6. R_+^* is the multiplicative group of the positive reals. Then $R_+^* \times C$ is directed group under the operation $(r_1, c_1) \circ (r_2, c_2) = (r_1r_2, c_1r_2 + c_2)$ and where $(r, c) \geqslant (1,0)$, $c = x + yi \Leftrightarrow$

a) $r > 1$ or $r = 1$, $x > 0$ or $r = 1$, $x = 0$, $y \geqslant 0$,

b) $r > 1$ or $r = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

c) $r > 1$ or $r = 1$, $x \geqslant 0$, $y > 0$ or $r = 1$, $x = y = 0$,

d) $r > 1$ or $r = 1$, $x > 0$, $y \geqslant 0$ or $r = 1$ and $x = y = 0$,

e) $r > 1$ or $r = 1$, $x > 0$, $y > 0$ or $r = 1$ and $x = y = 0$,

f) $r > 1$ or $r = 1$ and arc c belongs to the closed (or semiclosed or open) interval $[\alpha, \beta]$ where α and β are fixed angles satisfying $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$. The first order is full and the second is lattice. If we put Q_+^* = the multiplicative group of the positive rationals, then, $Q_+^* \times C$, $Q_+^* \times C_r$, $R_+^* \times R$, $Q_+^* \times R$, $Q_+^* \times Q$ are directed subgroups. For them, the first order is full and the second is lattice.

Example 7. Z is the additive group of all integers and n an fixed integer. Then, $nZ \times C$ is right ordered group under the operation $(nz_1, c_1) \circ (nz_2, c_2) = (nz_1 + nz_2, c_1(-1)^{nz_2} + c_2)$ and where $(nz, c) \geqslant (0,0)$, $c = x + yi \Leftrightarrow$

a) $nz > 0$, x even, y even or $nz = 0$, x even, y even or $nz = x = 0$, $y \geqslant 0$, y even,

b) $nz > 0$, x even, y even or $nz = 0$, $x \geqslant 0$, x even, $y \geqslant 0$, y even,

c) $nz > 0$, x even, y even or $nz = 0$, $x \geqslant 0$, x even, $y > 0$, y even or $nz = x = y = 0$,

d) $nz > 0$, x even, y even or $nz = 0$, $x > 0$, x even, $y \geqslant 0$, y even or $nz = x = y = 0$,

e) $nz > 0$, x even, y even or $nz = 0$, $x > 0$, x even, $y > 0$, y even or $nz = x = y = 0$,

f) $nz > 0$, x even, y even or $nz = 0$, arc c belongs to the closed (or semiclosed or open) interval $[\alpha, \beta]$ where α and β are fixed angles satisfying $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$, x and y even. $n\mathbf{Z} \times C_r$, $n\mathbf{Z} \times R$, $n\mathbf{Z} \times Q$, $n\mathbf{Z} \times n_1\mathbf{Z}$, n_1 fixed integer, are right ordered subgroups.

Example 8. K^* is the multiplicative group of the non-zero quaternions. $K^* \times C$ is directed group under the operation $(k_1, c_1) \circ (k_2, c_2) = (k_1 k_2, c_1 n(k_2) + c_2)$ where $n(k_2) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ if $k_2 = a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k}$ and where $(k, c) \geqslant (1,0)$, $c = x + y\mathbf{i} \Leftrightarrow$

a) $n(k) > 1$ or $k = 1$, $x > 0$ or $k = 1$, $x = 0$, $y \geqslant 0$,

b) $n(k) > 1$ or $k = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

c) $n(k) > 1$ or $k = 1$, $x \geqslant 0$, $y > 0$ or $k = 1$ and $x = y = 0$,

d) $n(k) > 1$ or $k = 1$, $x > 0$, $y \geqslant 0$ or $k = 1$ and $x = y = 0$,

e) $n(k) > 1$ or $k = 1$, $x > 0$, $y > 0$ or $k = 1$ and $x = y = 0$,

f) $n(k) > 1$ or $k = 1$ and arc c belongs to the closed (or semiclosed or open) interval $[\alpha, \beta]$ where α and β are fixed angles satisfying $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$.

If K_r^* denotes the multiplicative group of the non-zero rational quaternions then, $K^* \times C_r$, $K_r^* \times C$, $K_r^* \times C_r$, $K^* \times R$, $K_r^* \times Q$ are directed subgroups.

Example 9. K is the ring of quaternions. $K^* \times K$ is right ordered group under the operation $(k_1, k_2) \circ (k_1', k_2') = (k_1 k_1', k_2 k_1' + k_2')$ and where $(k_1, k_2) \geqslant (1,0) \Leftrightarrow n(k_1) > 1$ or $k_1 = 1$ and $a_i \geqslant 0$ $i = \overline{1,4}$ if $k_2 = a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k}$.

Example 10. $C \times C$ is fully right ordered group under the operation $(c_1, c_2) \circ (c_1', c_2') = (c_1 + c_1', c_2 e^{c_1'} + c_2')$ and where $(c_1, c_2) \geqslant (0,0)$, $c_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}$, $c_2 = x_2 + y_2\mathbf{i} \Leftrightarrow x_1 > 0$ or $x_1 = 0$, $y_1 > 0$ or $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 > 0$ or $x_1 = y_1 = x_2 = 0$, $y_2 \geqslant 0$. $C_r \times C$ is fully right ordered subgroup.

Example 11. $R \times C$ is directed group under the operation $(r_1, c_1) \circ (r_2, c_2) = (r_1 + r_2, c_1 e^{r_2} + c_2)$ and where $(r, c) \geqslant (0,0)$, $c = x + y\mathbf{i} \Leftrightarrow$

a) $r > 0$ or $r = 0$, $x > 0$ or $r = x = 0$ and $y \geqslant 0$,

b) $r > 0$ or $r = 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

c) $r > 0$ or $r = 0$, $x \geqslant 0$, $y > 0$ or $r = x = y = 0$,

d) $r > 0$ or $r = 0$, $x > 0$, $y \geqslant 0$ or $r = x = y = 0$,

e) $r > 0$ or $r = 0$, $x > 0$, $y > 0$ or $r = x = y = 0$,

f) $r > 0$ or $r = 0$ and arc c belongs to the closed (or semiclosed or open) interval $[\alpha, \beta]$ where α and β are fixed angles satisfying $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$.

The first order is full and the second is lattice. $Q \times C$, $Z \times C$, $U \times C$ are directed subgroups where U is the multiplicative group $\{-1, 1\}$. For them, the first order is full and the second is lattice. $R \times R$, $Q \times R$, $Z \times R$, $U \times R$ are fully ordered subgroups. The first appears in [3, p. 17].

Example 12. $Q_+^* \times C$ is directed group under the operation $(r_1, c_1) \circ (r_2, c_2) = (r_1 r_2, c_1 r_2 + c_2)$ and where $(r, c) \geqslant (1,0)$, $c = x + y\mathbf{i} \Leftrightarrow$

a) r is integer > 1 or $r = 1$, $x > 0$ or $r = 1$, $x = 0$, $y \geqslant 0$,

b) r is integer > 1 or $r = 1$, $x > 0$, $y \geqslant 0$,

c) r is integer > 1 or $r = 1$, $x \geqslant 0$, $y > 0$ or $r = 1$, $x = y = 0$,

d) r is integer > 1 or $r = 1$, $x > 0$, $y \geqslant 0$ or $r = 1$, $x = y = 0$,

e) r is integer > 1 or $r = 1$, $x > 0$, $y > 0$, or $r = 1$, $x = y = 0$,

f) r is integer > 1 or $r = 1$ and arc c belongs to the closed (or semiclosed or open) interval $[\alpha, \beta]$ where α and β are fixed angles satisfying $0 \leqslant \beta - \alpha < \pi$. The first two orders are lattice. $Q_+^* \times R$ and $Q_+^* \times Q$ are lattice-ordered subgroups.

Example 13. G is additive group and $A(G)$ is the group of all automorphisms of G. $A \times G$ is group under the operation $(\alpha_1, g_1) \circ (\alpha_2, g_2) = (\alpha_1\alpha_2, g_1\alpha_2 + g_2)$. If I is the group of the interior automorphisms of G, $I \times G$ is subgroup of $A \times G$.

Example 14. $A_0(G)$ is the group of the 0-automorphisms of the directed group, G. $A_0 \times G$ is right ordered group by the same operation as in the example 13 and where $(\alpha, g) \geqslant (i, 0) \Leftrightarrow \alpha > i$ or $\alpha = i$ and $g \geqslant 0$.

Example 15. G is multiplicative commutative partially ordered group, $a(G)$ is the group composed from two automorphisms of G; the identity and the automorphism which sends g to g^{-1}, G_i are multiplicative right ordered groups and f_i are homomorphisms from G_i into $a(G)$, $i = \overline{1, n}$. Then, $G_1 \times G_2 \times \times, \ldots, \times G_n \times G$ is right ordered group under the operation $(g_1, g_2, \ldots, g_n, g) \circ (g_1', g_2', \ldots, g_n', g) = (g_1g_1', g_2g_2', \ldots, g_ng_n', gf_1(g_1')f_2(g_2'), \ldots, f_n(g_n')g')$ and where the order is lexicographic. We give some examples of G_i, f_i and orders on G_i;

a) $G_i = nZ$, n fixed integer, $f_i(nz) =$ the identity $\Leftrightarrow nz$ is even, the usual order,

b) $G_i = S_n =$ the symmetric group of degree n, $f_i(\alpha) =$ the identity $\Leftrightarrow \alpha$ is even, the banal order,

c) $G_i = a(G)$, $f_i =$ the identity, the order is the equality,

d) $G_i = G_{in}(K) =$ the multiplicative group of all $n \times n$ square matrices with elements in a commutative associative fully ordered division ring, K, with determinant non-zero, $f_i(A) =$ the identity $\Leftrightarrow \det A > 0$, the order defined by $A \geqslant E \Leftrightarrow \det A > 1$ or $A = E$,

e) $G_i = K^* =$ the multiplicative group of an associative fully ordered division ring, K, $f_i(k) =$ the identity $\Leftrightarrow k > 0$, the order defined by the positive cone $P(K^*) = \{k \in K^*;\ k \geqslant 1\}$,

f) $G_i = S_c =$ the multiplicative group of all real sequences with non-zero terms and with finite non-zero limit, $f_i(a_n) =$ the identity $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n > 0$, the order defined by the positive cone $P(S_c) = \{a_n;\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n > 1\}$,

g) $G_i = L_{x_0} =$ the multiplicative group of all functions $f: (a, b) \to R$, so that $\forall x \in (a, b) f(x) \neq 0$ and with limit $\neq 0$ at the point $x_0 \in (a, b)$, $f_i(f) =$ identity $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, the order defined by the positive cone $P(L_{x_0}) = \{f;\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 1\}$. Regarding G, many examples can be found in [3, p. 16]. Here we give the only example when $G = K^* =$ the multiplicative group of a commutative associative fully ordered division ring, K, with the order defined by the positive cone $P(K^*) = \{k \in K^*;\ k \geqslant 1\}$ or $G = K_+^* =$ the multiplicative group of the positive elements of K, with the same order. We note that if the orders of G_i and G, $i = \overline{1, n}$ are full, so is the order of $G_1 \times \times G_2 \times \ldots \times G_n \times G$ and that even if G_i are commutative partially ordered groups, $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \times G$ can be not partially ordered. The example from [1] is a special case of the example 15 from here.

Example 16. $G_i =$ multiplicative commutative group, $f_i =$ homomorphism of G_i into the multiplicative commutative group $U = \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$,

and if are given the integers n_j, so that $1 \leqslant n_j \leqslant n$, $j = \overline{1, k}$ and $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ and if we put $n_{1j} = n_1 + n_2 + \ldots + n_j$, $j = \overline{1, k}$, then, $\Pi G_i = \{(g_i) ; g_i \in G_i, i = \overline{1, n}\}$ becomes group under the operation

$$(g_i) \circ (g_i') = \Big(g_1 \prod_{n_{1k-1}+1}^{n_{1k}} f_i(g_i') \cdot g_1',\ g_2 \prod_{n_{1k-1}+1}^{n_{1k}} f_i(g_i') \cdot g_2',\ \ldots,\ g_{n_1} \prod_{n_{1k-1}+1}^{n_{1k}} f_i(g_i') \cdot g_{n_1}',$$

$$,\ g_{n_1+1} \prod_{1}^{n_{11}} f_i(g_i') \cdot g_{n_1+1}',\ g_{n_1+2} \prod_{1}^{n_{11}} f_i(g_i') \cdot g_{n_1+2}',\ \ldots,\ g_{n_1+n_2} \prod_{1}^{n_{11}} f_i(g_i') \cdot g_{n_1+n_2}',$$

$$,\ \ldots,\ g_{n_{1k-1}+1} \prod_{n_{1k-2}}^{n_{1k-1}} f_i(g_i') \cdot g_{n_{1k-1}+1}',\ g_{n_{1k-1}+2} \prod_{n_{1k-2}}^{n_{1k-1}} f_i(g_i') \cdot g_{n_{1k-1}+2}',\ \ldots,\ g_n \prod_{n_{1k-2}}^{n_{1k-1}} f_i(g_i') \cdot g_n' \Big),$$

where $g \Pi f_i(g_i') = g$ if $\Pi f_i(g_i') = 1$ and $g \Pi f_i(g_i') = g^{-1}$ if $\Pi f_i(g_i') = -1$. Because the groups $a(G_i)$ and U are isomorphic, as G_i and f_i can be taken the examples a), c), e) (the commutative case), f), g) from the example 15.

Example 17. G is additive commutative partially ordered group with the positive cone P, f is homomorphism of G into $a(G)$ so that $f(P) = 1$. G becomes right ordered group by $a \circ b = af(b) + b$ and with the same cone, P.

Example 18. $Z_n = \{(z_i) = (z_1, z_2, \ldots, z_n) ; \quad z_i \in Z, \ i = \overline{1, n}\}$ becomes right ordered group under the operation $(z_i) \circ (z_i') = \left(z_i (-1)^{\sum_1^n z_i'} + z'_i \right)$, with the positive cone $P = \{(z_i) ; z_i \geqslant 0$ and even, $i = \overline{1, n}\}$.

Example 19. If K is the multiplicative group of a commutative associative fully ordered division ring K, then $K_n^* = \{(k_i) = (k_1, k_2, \ldots, k_n) ; k_i \in K^*, i = \overline{1, n}\}$ becomes right ordered group under the operation $(k_i) \circ (k_i') = (k_i \prod_1^n k_i' . . k_i')$ where $k_i \prod_1^n k_i' = k_i$ if $\prod_1^n k_i' > 0$ and $k_i \prod_1^n k_i' = k_i^{-1}$ if $\prod_1^n k_i' < 0$, and with the positive cone $P = \{(k_i) ; k_i \geqslant 1, i = \overline{1, n}\}$. In the same way one can construct examples with S_c and L_{x_0} from the example 15.

Final remarks. All the group obtained in this paper are non-commutative. On some of them one can introduce topologies with special properties, according to [2].

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

Received May 4, 1976

REFERENCES

1. Conrad P., *Right Ordered Groups.* Michigan Math. J., 6, 267–275 (1959).
2. Costovici Gh., *Topologies and Orders Simultaneously Compatible with the Operation of a Group and which Induce one Another.* Bul. Inst. polit. Iași, XVII (XXI), *1–2*, s. I, 59–61 (1971).
3. Fuchs L., *Partially Ordered Algebraic Systems.* Pergamon Press, Oxford, 1963.

GRUPURI OBȚINUTE DIN GRUPURI CU GRUPURI DE OPERATORI

(Rezumat)

Din grupuri cu grupuri de operatori și cu ajutorul unor homomorfisme cu propietăți speciale se obțin grupuri noi și se studiază unele proprietăți ale lor. Se dau mai multe exemple.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 519.5

ASUPRA RELAŢIILOR DE ANTIECHIVALENŢĂ

DE

PARASCHIVA BÎRSAN

1. Dată o mulţime X arbitrară, o relaţie binară R pe X este o submulţime a produsului cartezian $X \times X$; mulţimea tuturor relaţiilor pe X formează un semigrup. Există o bogată literatură privitoare la relaţiile binare în general sau cazuri particulare ale lor. În [4] este iniţiat un studiu al relaţiilor tranzitive. În [3, p. 160] este introdusă noţiunea de relaţie de antiechivalenţă şi este menţionat faptul că în privinţa relaţiilor de acest fel nu a fost întreprins nici un studiu.

Convenim ca o relaţie binară R pe mulţimea X să fie numită, pe scurt, relaţie, ca $(x, y) \in R$ să fie notat xRy şi ca $(x, y) \notin R$ să fie notat $x\bar{R}y$. Relaţia R este *antireflexivă* dacă oricare ar fi $x \in X$ avem $x\bar{R}x$. Relaţia R este *antisimetrică* dacă oricare ar fi $x, y \in X$, $x \neq y$, şi xRy avem că $y\bar{R}x$. R este *antitranzitivă* dacă oricare ar fi $x, y, z \in X$, $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, avem că xRy şi yRz implică $x\bar{R}z$. În sfîrşit, o relaţie de *antiechivalenţă* este o relaţie antireflexivă, antisimetrică şi antitranzitivă [3, p. 160].

În această Notă ne propunem să dăm cîteva teoreme de descompunere a unei relaţii în relaţii de antiechivalenţă; în Secţiunea **2** avem în vedere relaţii pe o mulţime X arbitrară iar în Secţiunile **3** şi **4** mulţimea X este finită.

2. Vom spune că o relaţie R pe mulţimea arbitrară X se *descompune* în relaţiile $R_1, R_2, \ldots, R_k$, dacă acestea sînt disjuncte două cîte două şi $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k$ (nu este exclus cazul cînd una sau mai multe dintre aceste relaţii sînt vide).

Teorema 1. *O relaţie R reflexivă şi tranzitivă se descompune în mod unic în două relaţii R_1 şi R_2 astfel încît R_1 este relaţie de echivalenţă şi R_2 este antireflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Mai mult, R_1 este cel mai mare element al mulţimii relaţiilor de echivalenţă incluse în R.*

Demonstraţie. În cazul banal cînd R este simetrică $R_1 = R$ şi $R_2 = \emptyset$. Dacă R nu este simetrică, fie S reunirea tuturor relaţiilor de echivalenţă incluse în R (astfel de relaţii există: $\Delta = \{(x,x);\ x \in X\} \subset R$). Evident relaţia S este reflexivă şi simetrică. Raţionînd prin reducere la absurd, să arătăm că S este şi tranzitivă. Dacă S nu este şi tranzitivă, fie T închiderea tranzitivă a ei. Întrucît R este tranzitivă avem că $S \subset T \subset R$. Deoarece S este reflexivă şi simetrică rezultă că T are la rîndul ei proprietăţi. Ca urmare $S = T$. Fie acum $R_1 = S$ şi $R_2 = R - R_1$ (R_1 şi R_2 nevide întrucît R nu este simetrică). Relaţia R_1 verifică cerinţele teoremei; din faptul că R_1 este cel mai mare element al mulţimii relaţiilor de echivalenţă incluse în R, rezultă unicitatea

descompuneri acesteia din urmă. Să arătăm că R_2 are proprietățile din enunțul teoremei. Evident R_2 este antireflexivă. R_2 este de asemenea antisimetrică căci, în caz contrar, dacă xR_2y și yR_2x închiderea tranzitivă a relației $R_1 \cup \{(x,y), (y, x)\}$ va fi relație de echivalență inclusă în R și mai vastă decît R_1, ceea ce este absurd. În sfîrșit, să demonstrăm că R_2 este tranzitivă raționînd prin reducere la absurd. Să presupunem că avem xR_2y și yR_2z dar $x\overline{R}_2z$. Atunci xR_2y și yR_2z implică xRz. De asemenea, xRz și $x\overline{R}_2z$ implică xR_1z și deci zR_1x. Deoarece zR_1x și xR_2y rezultă că zRy. Deosebim două cazuri: a) zR_1y și b) zR_2y. Dacă zR_1y rezultă că yR_1z, ceea ce este în contradicție cu yR_2z. Dacă zR_2y atunci contrazicem faptul că yR_2z.

Teorema 2. *O relație R antireflexivă și antitranzitivă se descompune în două relații de antiechivalență R_1 și R_2 astfel încît R_1 este element maximal în mulțimea relațiilor de antiechivalență incluse în R. Reciproc, oricărui element maximal al mulțimii relațiilor de antiechivalență incluse în R îi corespunde o descompunere a relației R. Numărul descompunerilor relației R — deci numărul elementelor maximale R_1 — este $2^{\text{card } A}$* (A este clasa tuturor relațiilor simetrice incluse în relația R și formate din două elemente).

Demonstrație. Dacă R este antisimetrică se consideră $R_1 = R$ și $R_2 = \emptyset$. Dacă R nu este antisimetrică, clasa A nu este vidă. Utilizînd axioma alegerii, fie R_2 o mulțime care conține cîte un singur element din fiecare parte din A. Să arătăm că relațiile $R_1 = R - R_2$ și R_2 ce dau o descompunere a relației R verifică cerințele teoremei. Într-adevăr, R_1 și R_2 sînt nevide, antireflexive și antitranzitive, ca părți ale relației R; de asemenea, din modul cum au fost construite, ele sînt și antisimetrice. Să presupunem că R_1' este o relație de antiechivalență inclusă în R astfel încît $R_1 \subset R_1'$. Dacă ar exista un element (x, y) așa ca $xR_1'y$ și $x\overline{R}_1y$ atunci xR_2y. Din construcția lui R_2 rezultă că yR_1x, de unde $yR_1'x$ în contradicție cu faptul că R_1' este antisimetrică. Prin urmare relația R_1 este element maximal în mulțimea relațiilor de antiechivalență incluse în R.

Reciproc, fie R_1 element maximal — existența căruia rezultă din cele de mai sus aplicînd Lema lui Zorn relativ la mulțimea relațiilor de antiechivalență incluse în R — și să arătăm că relațiile R_1 și $R_2 = R - R_1$ dau o descompunere a lui R de tipul dorit. Faptul că R_2 este antireflexivă și antitranzitivă este evident. Să arătăm că R_2 este antisimetrică procedînd prin reducere la absurd. Dacă există (x, y) astfel ca xR_2y și yR_2x atunci relația $R_1 \cup \{(x, y)\} \subset R$ este relație de antiechivalență, în contradicție cu proprietatea de maximalitate a relației R_1.

Evident numărul descompunerilor relației R este același cu numărul relațiilor R_2 obținute ca mai sus. Oricare ar fi partea ce aparține lui A să notăm cu 0 și 1 cele două elemente ale sale (aceasta se poate realiza utilizînd axioma alegerii pentru clasa de părți A, notînd de exemplu cu 0 elementele „alese" și cu 1 elementele „rămase" în părțile din A). Se vede ușor că există o bijecție între mulțimea relațiilor R_2 și mulțimea funcțiilor caracteristice definite pe A. Cum această mulțime din urmă este cardinal echivalentă cu mulțimea părților lui A, cardinalul ei este $2^{\text{card } A}$. Ca urmare mulțimea descompunerilor relației R are același cardinal.

3. Fie $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime finită arbitrară cu n elemente. În această secțiune, cît și în următoarea, ne vom ocupa cu descompunerea relației $X \times X - \Delta$ într-un anumit număr de relații de antiechivalență de o formă particulară.

Fie șirul de elemente din X: a_1, a_{1+p}, a_{1+2p}, ..., unde convenim ca $a_{1+kp} = a_q$, $1 \leqslant q \leqslant n$, dacă $1 + kp \equiv q \pmod n$. Dacă primul element din acest șir care coincide cu a_1 este a_{1+kp} vom numi relația:

$$\{(a_1, a_{1+p}), (a_{1+p}, a_{1+2p}), \ldots, (a_{1+(k-1)p}, a_{1+kp} = a_1)\}$$

ciclu de pas p și lungime k. Notăm acest ciclu:

$$(a_1, a_{1+p}, \ldots, a_{1+(k-1)p}),$$

notație justificată de faptul că unui astfel de ciclu îi corespunde substituția ciclică

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{1+p} & \dots & a_{1+(k-1)p} \\ a_{1+p} & a_{1+2p} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Dat un ciclu de pas p și lungime k relația simetrică acestui ciclu este tot un ciclu de pas $n - p$ și de lungime k — *ciclul simetric* ciclului dat.

Următoarele două leme se pot găsi, cu diferențe de formulare, [5, pp. 23 și 59]. Notațiile folosite sînt cele obișnuite [4] : d/n pentru d divide n, (m, n) pentru cel mai mare divizor al numerelor m și n, $\varphi(n)$ pentru indicatoarea lui Euler a numărului n și $\tau(n)$ pentru numărul divizorilor lui n (inclusiv 1 și n).

L e m a 1. *Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ n elemente arbitrare, p un număr ce satisface condiția $1 \leqslant p < n$ și $d = (n, p)$. Atunci există în mod unic d cicluri de pas p și lungime $\frac{n}{d}$ formate cu aceste elemente.*

Observații. 1) Dacă considerăm pasul egal cu n obținem n cicluri de lungime 1 : $(a_1), (a_2), \dots, (a_n)$.

2) Dacă considerăm un pas $p > n$, obținem ciclurile la care sîntem conduși de pasul p', unde $1 \leqslant p' < n$ și $p \equiv p' \pmod{n}$.

L e m a 2. *Fie n un număr natural și d un divizor al lui. Numărul numerelor p, $1 \leqslant p < n$, ce satisface condiția $(p, n) = d$ este $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.*

T e o r e m a 3. *Dată mulțimea $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, relația $X \times X - \Delta$ se descompune în mod unic în cicluri cu pas ; numărul ciclurilor este $\sum_{\substack{d/n \\ d<n}} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$, lungimea unui ciclu este de forma $\left(\frac{n}{d}\right)$ $(d < n,\ d/n)$ iar numărul lungimilor distincte este $\tau(n) - 1$.*

D e m o n s t r a ț i e. Conform Lemei 1, pentru un număr natural p, $1 \leqslant p < n$, corespund în mod unic $d = (p, n)$ cicluri de pas p și lungime $\frac{n}{d}$. Deoarece aceste cicluri considerate ca relații sînt disjuncte, suma lungimilor lor este n. Ca urmare, reunirea ciclurilor ce se obțin atunci cînd p ia succesiv valorile $0,1,\dots, n-1$ este o relație cu $n(n-1)$ elemente. Întrucît au fost excluse ciclurile de lungime 1, în această reuniune nu sînt conținute puncte din Δ. Ca urmare această reuniune coincide cu $X \times X - \Delta$, căci aceasta din urmă are de asemenea $n(n-1)$ elemente. Deci mulțimea ciclurilor cu pas este o descompunere a relației $X \times X - \Delta$.

Deoarece orice ciclu are lungimea de forma $\frac{n}{d}$, $d < n$, rezultă că numărul lungimilor distincte este $\tau(n) - 1$. Conform Lemei 2, numărul pașilor p care conduc la cicluri de lungime $\frac{n}{d}$ este $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Întrucît pentru orice astfel de pas corespund d cicluri rezultă că divizorului d al lui n, $d < n$, îi corespund $d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ cicluri de lungime $\frac{n}{d}$. Deci numărul total de cicluri este $\sum_{\substack{d/n \\ d<n}} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$,

Observații. Relația $X \times X - \Delta$ se descompune în cicluri de lungime n dacă și numai dacă n este număr prim.

4. În cursul acestei secțiuni considerăm că mulțimea $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are un număr de elemente n prim și impar. Dat un ciclu de pas p și lungime n se obține un ciclu de pas dublu $2p$ și aceeași lungime prin compunerea ciclului dat (considerat ca relație) cu el însuși, adică considerînd ciclul $(a_1, a_{1+2p}, a_{1+4p}, \ldots, a_{1+2(n-1)p})$. Continuînd în același mod putem trece succesiv la cicluri de lungime n și de pași 2^2p, 2^3p, etc. Obținem un șir de cicluri pe care le vom numi *cicluri înlănțuite* prin compunere.

Conform Teoremei 3 rezultă, în ipoteza făcută relativ la n, că relația $X \times X - \Delta$ se descompune în $n - 1$ cicluri de lungime n. Considerînd mulțimea claselor de cicluri înlănțuite realizăm o partiție a mulțimii ciclurilor acestei descompuneri. Vom aduce precizări descompunerii relației $X \times X - \Delta$ în cicluri determinînd numărul claselor acestei partiții cît și unele proprietăți ale lor.

Să amintim mai întîi două noțiuni din teoria congruențelor, necesare în cele ce urmează [2, § 6]. Se numește *exponentul lui a (mod n)* cel mai mic număr k, întreg pozitiv, ce satisface congruența $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, $(a, n) = 1$. Dacă n este prim și $k = n - 1$, a se numește *rădăcină primitivă (mod n)*.

Fie numerele p, q, $1 \leqslant p, q < n$, pași ai unor cicluri oarecare și șirurile pașilor ciclurilor înlănțuite prin compunere pornind de la ciclurile date:

$$(1) \qquad p, \quad 2p, \quad 2^2p, \ldots,$$

$$(2) \qquad q, \quad 2q, \quad 2^2q, \ldots.$$

Lema 3. 1) *În șirurile* (1) *și* (2) *se revine la pașii p și q, respectiv, cu termeni de același rang.*

2) *Dacă în șirul* (1) *pasul* $n - p$, *simetric lui p, apare înainte de pasul p, atunci relativ la șirul* (2) *lucrurile se petrec la fel; mai mult, termenii care coincid cu pașii simetrici au același rang.*

Observație. Conform punctului 1) al Lemei 3 rezultă că în partiția în clase de cicluri înlănțuite clasele au același număr de elemente și anume numărul k, exponentul lui 2 (mod n).

Teorema 4. *Fie n un număr impar, k exponentul lui 2 (mod n) și* $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *o mulțime arbitrară cu n elemente. Atunci relația* $X \times X - \Delta$ *se descompune în* $n - 1$ *cicluri care pot fi grupate în* $\frac{n-1}{k}$ *clase de cîte k cicluri înlănțuite. Această partiție a ciclurilor în clase are una dintre următoarele proprietăți:*

1) *orice clasă conține odată cu un ciclu și ciclul simetric lui,*

2) *partiția conține odată cu o clasă de cicluri și clasa ciclurilor simetrice lor. Partiția are proprietatea* 1) *sau* 2) *după cum k este par sau impar.*

Demonstrație. Din observația anterioară rezultă că partiția considerată a celor $n - 1$ cicluri are $\frac{n-1}{k}$ clase iar fiecare clasă are k elemente, k fiind exponentul lui 2 (mod n). Dacă există un ciclu astfel încît atît el cît și simetricul lui aparțin aceleiași clase, din punctul 2) al Lemei 3 rezultă că toate ciclurile au aceeași proprietate. Așadar, în acest caz partiția satisface proprietatea 1) din enunț. În caz contrar, adică în ipoteza că orice ciclu nu este în aceeași clasă cu simetricul lui, vom arăta că partiția satisface proprietatea 2) din enunț. În acest scop este suficient să arătăm că date două cicluri din aceeași clasă, ciclurile simetrice lor fac parte dintr-o altă clasă. Într-adevăr, dacă ciclurile date au pașii p și q avem

$$q \equiv 2^m p \pmod{n}$$

și deci

$$n-q \equiv 2^m(n-p) \pmod{n};$$

cu alte cuvinte, ciclurile simetrice ce au pașii $n-p$ și $n-q$ sînt în aceeași clasă. Ultima parte a teoremei revine la a demonstra că k este par dacă și numai dacă orice clasă conține odată cu un ciclu și simetricul lui. Într-adevăr, deoarece

$$2^k - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

dacă k este par avem

$$(2^{\frac{k}{2}} + 1)(2^{\frac{k}{2}} - 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

de unde, k fiind exponentul lui 2 (mod n) rezultă că

$$2^{\frac{k}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

sau

$$2^{\frac{k}{2}} \equiv (n-1) \pmod{n},$$

adică ciclul cu pas 1 este în aceeași clasă cu ciclul simetric lui, ce are pasul $n-1$. Ca urmare dacă k este par, orice clasă conține odată cu un ciclu și simetricul lui. Implicația inversă este evidentă. Teorema este complet demonstrată.

Corolar. *Dacă n este număr prim impar și 2 este rădăcină primitivă (mod n), atunci relația $X \times X - \Delta$ se descompune în $n-1$ cicluri de lungime n care sînt înlănțuite prin compunere.*

Primită la 18 februarie 1976

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Clifford A. H., Preston G. B., *The Algebraic Theory of Semigroups* (I). Amer. Math. Soc., Providence, 1961.
2. Creangă I. ș.a., *Introducere în teoria numerelor*. EDP, Buc., 1965.
3. Harary F., *A very Independent Axiom System*. Amer. Math. Monthly, **68**, 159–162, (1961).
4. Michaud S. G., Hammer P. C., *Extended Topology: Transitive Relations*. Nieuw Archief voor Wiskunde, **XV**, 38–48 (1967).
5. Rusu E., *Aritmetica și teoria numerelor*. Vol. **II**, Ed. tehn., Buc., 1961.

SUR LES RELATIONS D'ANTIÉQUIVALENCE

(Résumé)

Dans cette Note on obtient quelques résultats sur la décomposition d'une relation binaire dans des relations d'antiéquivalence.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

УДК 517.9

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ (I)

Б. А. БОНДАРЕНКО, К. В. ЛЕН, Д. МАНЖЕРОН и М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ

Авторы, продолжая свои исследования в рамках дифференциальных систем сложной структуры [1], рассматривают ниже задачу об операторном представлении решений одного класса полилинейных уравнений с частными производными.

1. Рассмотрим полилинейное уравнение с частными производными вида

$$(1)\qquad K^n u(x, y) \equiv (D_\mu^r - L)^n u(x, y) = F(x, y), \quad K^j = K(K^{j-1}), \quad K^0 = 1,$$

где $D_\mu = \partial^\mu/(\partial x_1, \partial x_2 ... \partial x_\mu)$, $x = (x_1, x_2 ..... x_\mu) \in R^\mu$, L – линейный дифференциальный оператор переменных $y = (y_1, y_2, ..., y_\nu) \in R^\nu$. При $n = 1$ уравнение (1) обращается в уравнение, названное многочисленными исследователями „уравнением Манжерона“ [2].

Для сокращения дальнейших записей рассмотрим уравнение (1) при $\mu = 2$. Обобщение полученных ниже результатов на случай произвольного μ не представляет принципиальных трудностей.

Изучим два класса функций, имеющих следующие, связанные с оператором L и функцией $g(y)$ $\{L^m g(y) \neq 0, \ L^{m+1} g(y) = 0\}$, представления :

$$(2)\qquad H_{r,s,\alpha}^{m,p,1}(x, y) = \sum_{i=p-1}^{m+p-1} \binom{i}{p-1} \frac{x_1^{ri+s}\, x_2^{ri+s+\alpha}}{(ri+s)!\,(ri+s+\alpha)!} L^{i-p+1} g(y),$$

$$(3)\qquad H_{r,s,\alpha}^{m,p,2}(x, y) = \sum_{i=p-1}^{m+p-1} \binom{i}{p-1} \frac{x_1^{ri+s+\alpha}\, x_2^{ri+s}}{(ri+s+\alpha)!\,(ri+s)!} L^{i-p+1} g(y),$$

причём $p = 1, 2, ..., n$, $s = 0, 1, 2, ..., \alpha = 0, 1, 2$, а n и r – данные, как входящие в рассматриваемый класс уравнений (1).

Выражения (2) и (3) можно рассматривать для функций $g(y)$ аналитических в $\Omega \in R^\nu$. В этом случае m обращается в бесконечность, а выражения (2) и (3) – в ряды. Значения s и α в каждой из формул (2) и (3) независимы.

Т е о р е м а 1. *Функции* $H^{m,p,k}_{r,s,\alpha}(x, y)$ $(k=1, 2)$, при $p = 1, 2, ..., n$, $s = 0, 1, ..., r-1$, $\alpha = 0, 1, 2, ...$, *удовлетворяют уравнению*

$$(D_2^r - L)^n u(x,y) = 0.$$

Для доказательства этой теоремы используются равенства

$$KH^{m,p,k}_{r,s,\alpha}(x, y) = H^{m,p-1,k}_{r,s,\alpha}(x, y), \quad p \neq 1, \tag{4}$$

$$KH^{m,1,k}_{r,s,\alpha}(x, y) = 0, \tag{5}$$

справедливость которых устанавливается в результате непосредственных вычислений.

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ разлагается в области $\Omega \in R^2$ в равномерно сходящийся степенной ряд. Нетрудно убедиться, что такой ряд можно записать в виде

$$f(x_1, x_2) = \sum_{\alpha+2\beta=0}^{\infty} \left[a_{\beta,\alpha+\beta} \frac{x_1^{\beta} x_2^{\alpha+\beta}}{\beta!\,(\alpha+\beta)!} + a_{\alpha+\beta,\beta} \frac{x_1^{\alpha+\beta} x_2^{\beta}}{(\alpha+\beta)!\,\beta!} \right]. \tag{6}$$

Т е о р е м а 2. *Если функция* $f(x_1, x_2)$ *разлагается в равномерно сходящийся ряд* (6), *а функция* $g(y)$ *удовлетворяет указанным выше условиям, то в области сходимости ряда* (6) *равномерно сходится и удовлетворяет уравнению*

$$(D_2^r - L)^n u(x, y) = f(x_1, x_2)\, g(y)$$

ряд

$$\sum_{\alpha+2\beta=0}^{\infty} [a_{\beta,\alpha+\beta} H^{m,n,1}_{r,r+\beta,\alpha}(x, y) + a_{\alpha+\beta,\beta} H^{m,n,2}_{r,r+\beta,\alpha}(x, y)]. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы основано на равенстве (4), справедливого при $p \neq 1$ для любых s, в том числе для $s=r+\beta$, и на равенствах

$$KH^{m,1,1}_{r,r+\beta,\alpha}(x, y) = \frac{x_1^{\beta} x_2^{\alpha+\beta}}{\beta!\,(\alpha+\beta)!} g(y), \tag{8}$$

$$KH^{m,1,2}_{r,r+\beta,\alpha}(x, y) = \frac{x_1^{\alpha+\beta} x_2^{\beta}}{(\alpha+\beta)!\,\beta!} g(y). \tag{9}$$

2. В зависимости от значений μ, r, вида оператора L, для уравнения (1) могут быть поставлены задача Дарбу - Гурса - Манжерона и другие [3]. Если $n > 1$, то в этом случае можно рассматривать более общие задачи, подобно задаче Коши-Николеску, рассмотренной в работе [4] или же задаче Кривощеина-Манжерона, помещенной в рамках мемуаров в свет в 1963-64 и 65 гг. Для решения таких задач можно использовать функции (2) и (3), составляя из них соответствующие линейные комбинации или ряды.

Заметим, что оператор L может вырождаться в число. Пусть, например, $L=\lambda$. В этом случае полагаем $g(y)=1$, причём и уравнение (1) примет следующий вид :

$$K^n u(x) = (D_\mu^r - L)^n u(x) = F(x), \tag{10}$$

а функции (2) и (3) можно, заменяя индекс i на $i+p-1$ и полагая $m = \infty$, записать так :

$$H^{p,1}_{r,s,\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+p-1}{p-1} \lambda^i \frac{x_1^{ri+rp-r+s}\, x_2^{ri+rp-r+s+\alpha}}{(ri+rp-r+s)!\,(ri+rp-r+s+\alpha)!}, \tag{11}$$

$$H^{p,2}_{r,s,\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+p-1}{p-1} \lambda^i \frac{x_1^{ri+rp-r+s+\alpha}\, x_2^{ri+rp-r+s}}{(ri+rp-r+s+\alpha)!(ri+rp-r+s)!}. \tag{12}$$

Если в (11) – (12) положить $p = 1$, то можно установить связь между функциями $H^{1\,2}_{2,s,\alpha}(x)$, $H^{1,2}_{2,s,\alpha}(x)$ и F - функциями введенными в работах [5].

Поступила в 1 V 1976 г.

АН Узб. ССР, г. Ташкент, СССР,
Конкордия университет, Монреал, Канада,
Ясски политехнически институт, СР Румыния
и
Альбертски университет, Едмонтон, Канада

ЛИТЕРАТУРА

1. a) Манжерон Д., Огюзторели М. Н., *Математические системы сложных структур. Решения некоторых линейных и нелинейных функционально-интегральных и интегро-дифференциалло-функциональных уравнений.* ДАН СССР, **196**, 293—295, 523—526, (1971). b) Krivoshein L. E. Mangeron D., Oguztoreli M. N., Bull. Soc. Math. Belg., **XXVII**, 57 – 65 (1975); Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, **LXIX**, *4*, 831—843 (1975); Boll. Un. Mat. Ital., **11**, *1*, 76—83 (1975); Bul. Inst. polit. Buc., **XXXVII**, *1*, 7—12 (1975); Bul. Inst. polit. Iași, **XXII (XXVI)**, *1—2*, s. I, 7—11 (1976).
2. a) Easwaran S., *A Study on certain Higher Order Partial Differential Equation of Mangeron.* Doctoral Dissertation, Dept. of Math., University of Alberta, Edmonton, Alta., 1972; b) Oguztoreli M. N., *Boundary value problems for Mangeron's equations.* Torino, Acad. Sci., **105**, 759—764 (1970—71); c) Leung K. V., Oguztoreli M. N., *On the Numerical Solutions of a Boundary Value Problem for a Polyvibrating Equation of Mangeron* (I). Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli, (4), **XL**, 52—57 (1973); d) Birkhoff G., Gordon W., *On the Draftsman and Related Equations.* J. Approx. Th., **1**, 199—208 (1968).
3. a) Krivoshein L. E., Kutanov A., Leung K. V., Oguztoreli M. N., *Problèmes à la frontière aux conditions intégrales fonctionnelles pour une classe d'équations intégrodifférentielles de Mangeron aux intégrales d'Urysohn.* Bull. Soc. roy. Sci. Liège, **XXVI**, 57—65 (1975); b) Krivoshein L. E., Leung K. V., Oguztoreli M. N., Dzhunuzbekova S., *Problèmes concernant différentes classes d'équations intégrodifférentielles non linéaires de Mangeron.* Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (8), **56**, 151—156 (1974); c) Krivoshein L. E., Oguztoreli M. N., *Sul problema di Goursat per un' equazione integro-differenziale polivibrante di Mangeron.* Rend. Accad. Sci. Instituto Lombardo, Milano, 108A, 42—49 (1974).
4. Бондаренко Б. А., *Решение задачи Коши-Николеску для полилинейных уравнений в частных производных* (в печати).

5. Mangeron D., Oguztoreli M. N., *Darboux Problem for a Polyvibrating Equation. Solution as a „F-function"*. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 67, 1488—1492 (1970).

STUDIUL ECUAȚIILOR POLILINIARE CU DERIVATE PARȚIALE (I)

(Rezumat)

Se consideră problema de reprezentare prin operatori a soluțiilor unei clase de ecuații poliliniare cu derivate parțiale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. Z. 513.8

CONSIDERAŢII ASUPRA DERIVATEI LIE A SPIN-TENSORILOR

DE

EUGENIA MUNTEANU

Prin definiţie pentru un cîmp de (q, r) tensori-(s, t) spinori ψ de clasă C^1 pe varietatea riemanniană n-dimensională V_n, avem [1]:

$$[\mathfrak{L}(X)\psi]^{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_t} = [X^k \nabla_k \psi]^{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_t} -$$

$$- \sum_{l=1}^{q} (\nabla_j X^{i_l}) \psi^{i_1 \dots i_{l-1} j i_{l+1} \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_t} + \sum_{l=1}^{r} (\nabla^i X_{j_l}) \psi^{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_r \beta_1 \dots \beta_t} +$$

(1)

$$+ \frac{1}{4} (\nabla_j X_i) \sum_{l=1}^{s} (P^i P^j)^{\alpha_l}_{\beta} \psi^{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \beta \alpha_{l+1} \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_t} -$$

$$- \frac{1}{4} (\nabla_j X_i) \sum_{l=1}^{t} \psi^{i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_r \beta_1 \dots \beta_{l-1} \alpha \beta_{l+1} \dots \beta_t} (P^i P^j)^{\alpha}_{\beta_l},$$

unde $P^{i\alpha}_{\beta}$ reprezintă spin-tensorul fundamental.

Cazuri particulare. a) Pentru un spinor contravariant derivata Lie, plecînd de la (1), este:

$$(2) \quad \mathfrak{L}(X)\psi^{\alpha} = X^k \nabla_k \psi^{\alpha} + \frac{1}{4} \nabla_j X_i (P^i P^j)^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta} = X^k \nabla_k \psi^{\alpha} + \frac{1}{4} \nabla_j X^i P^{i\alpha}_{\rho} P^{j\rho}_{\beta} \psi^{\beta}.$$

b) Derivata Lie a spin-tensorului fundamental $P^{i\alpha}_{\beta}$, (1,0) tensor-(1,1) spinor este conform cu (1):

$$(3) \quad \mathfrak{L}(X) P^{i\alpha}_{\beta} = X^k \nabla_k P^{i\alpha}_{\beta} - \nabla_j X^i P^{j\alpha}_{\beta} + \frac{1}{4} \nabla_j X_k P^{k\alpha}_{\tau} P^{j\tau}_{\rho} P^{i\rho}_{\beta} - \frac{1}{4} \nabla_j X_k P^{i\alpha}_{\rho} P^{k\rho}_{\nu} P^{j\nu}_{\beta}.$$

În [2] s-au introdus prin definiţie formele:

$$(4) \quad \Omega^{\alpha} = \mathrm{d}\varphi^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \varphi^{\rho},$$

unde φ^{α} reprezintă un cîmp de spinori contravarianţi asociat cîmpului de spinori ψ^{α} de pe varietatea riemanniană V_n, iar ω^{α}_{β} sînt formele de conexiune spinorială asociată unei conexiuni liniare de forme τ^i_j.

Legea de transformare a formelor Ω^α la schimbări de repere spinoriale

$$\Omega^{\alpha'} = a^{\alpha'}_{\eta}\,\Omega^{\eta} \quad : (a^{\alpha'}_{\eta}) \in S(n), \tag{5}$$

este $S(n)$ fiind grupul spinorial definit în [3].

Din (5) rezultă că formele Ω^α sînt 2-forme spinoriale contravariante.

Expresia acestor forme dată cu ajutorul formelor de torsiune $\mathcal{H}^i$ a conexiunii liniare căreia i s-a asociat conexiunea spinorială, a spin-tensorului fundamental $P^\alpha_{i\beta}$ și a cîmpului de spinori contravarianți ψ^β considerat, este :

$$\Omega^\alpha = P^\alpha_{i\beta}(\nabla\psi^\beta \wedge \theta^i + \psi^\beta \mathcal{H}^i), \tag{6}$$

θ^i fiind un coreper.

Folosind (6) se introduce [2] pentru conexiunea spinorială (1,2) tensorul-(1,0) spinorul K^α_{ij} prin :

$$\Omega^\alpha = \frac{1}{2} K^\alpha_{ij}\theta^i \wedge \theta^j . \tag{7}$$

Acest spin-tensor, K^α_{ij}, se exprimă cu ajutorul tensorului de torsiune T^k_{ij} al conexiunii liniare căreia i s-a asociat conexiunea spinorială, a spin-tensorului fundamental $P^\alpha_{i\beta}$ și a cîmpului de spinori contravarianți ψ^β considerat, prin relația :

$$K^\alpha_{ij} = P^\alpha_{j\beta}\nabla_i\psi^\beta - P^\alpha_{i\beta}\nabla_j\psi^\beta + P^\alpha_{k\beta}\psi^\beta T^k_{ij} . \tag{8}$$

Datorită proprietăților sale, asemănătoare celor pe care le are tensorul de torsiune ale unei conexiuni, acestui spin-tensor K^α_{ij} i s-a dat denumirea de spin-tensor de torsiune al conexiunii spinoriale considerată, iar formelor Ω^α forme de torsiune [2].

Derivata Lie a spin-tensorului K^α_{ij} este, dacă ținem seama de (1) și de (8),

$$\begin{aligned} \pounds(X)K^\alpha_{ij} = {} & P^\alpha_{k\beta}\psi^\beta\pounds(X)T^k_{ij} + T^k_{ij}\pounds(X)\,(P^\alpha_{k\beta}\psi^\beta) + \\ & + \pounds(X)\,(P^\alpha_{j\beta}\nabla_i\psi^\beta) - \pounds(X)\,(P^\alpha_{i\beta}\nabla_j\psi^\beta). \end{aligned} \tag{9}$$

Relația (9) exprimă legătura dintre derivatele Lie ale tensorului de torsiune al conexiunii liniare T^k_{ij} și ale spin-tensorului de torsiune al conexiunii spinoriale asociată, K^α_{ij}.

Cazuri particulare deduse din (9). 1. Dacă conexiunea liniară este fără torsiune, $T = 0$, atunci și $\pounds(X)T = 0$ și (9) devine :

$$\pounds(X)K^\alpha_{ij} = \pounds(X)\,(P^\alpha_{j\beta}\nabla_i\psi^\beta) - \pounds(X)\,(P^\alpha_{i\beta}\nabla_j\psi^\beta). \tag{10}$$

În particular și $\pounds(X)K^\alpha_{ij} = 0$ dacă și numai dacă :

$$\pounds(X)\,(P^\alpha_{j\beta}\nabla_i\psi^\beta) = \pounds(X)\,(P^\alpha_{i\beta}\nabla_j\psi^\beta). \tag{10'}$$

2. În cazul în care cîmpul de vectori X este izometrie infinitezimală [1] $\alpha(X)P^\alpha_{i\beta} = 0$, atunci din (9) rezultă :

$$\begin{aligned} \pounds(X)K^\alpha_{ij} = {} & P^\alpha_{k\beta}\psi^\beta\pounds(X)T^k_{ij} + T^k_{ij}P^\alpha_{k\beta}\pounds(X)\psi^\beta + \\ & + P^\alpha_{j\beta}\pounds(X)\,(\nabla_i\psi^\beta) - P^\alpha_{i\beta}\pounds(X)\,(\nabla_j\psi^\beta). \end{aligned} \tag{11}$$

3. Dacă cîmpul de vectori X e o transformare conformă atunci $\pounds(X)P^{\alpha}_{i\beta}$ este proporţional cu $P^{\alpha}_{i\beta}$, adică [1]

$$\pounds(X)P^{\alpha}_{i\beta} = \frac{\delta X}{n} P^{\alpha}_{i\beta}$$

şi (9) devine :

$$\pounds(X)K^{\alpha}_{ij} = P^{\alpha}_{k\beta}\psi^{\beta}\pounds(X)T^{k}_{ij} + T^{k}_{ij}P^{\alpha}_{k\beta}\left(\frac{\delta X}{n}\psi^{\beta} + \pounds(X)\psi^{\beta}\right) +$$

(12)

$$+ P^{\alpha}_{j\beta}\left(\frac{\delta X}{n}\nabla_i\psi^{\beta} + \pounds(X)\nabla_i\psi^{\beta}\right) + P^{\alpha}_{i\beta}\left(\frac{\delta X}{n}\nabla_j\psi^{\beta} + \pounds(X)\nabla_j\psi^{\beta}\right).$$

4. Dacă cîmpul de vectori X este o izometrie infinitezimală ($\pounds(X)P^{\alpha}_{i\beta} = 0$) şi conexiunea liniară este fără torsiune atunci avem :

$$\pounds(X)K^{\alpha}_{ij} = P^{\alpha}_{j\beta}\pounds(X)\nabla_i\psi^{\beta} - P^{\alpha}_{i\beta}\pounds(X)\nabla_i\psi^{\beta}.$$

Primită la 7 noiembrie 1974 *Universitatea „Al. I. Cuza", Iaşi*

BIBLIOGRAFIE

1. Kosmann I., *Derivées de Lie des spineurs.* C.R. Acad. Sci. Paris, **262**, 7, 394 (1966).
2. Munteanu E., *Certaines propriétés des connexions spinorielles.* Lucrările simpozionului Acad. Române de şt. matem. din 24 IX 1973.
3. Bown A., *Geometry of Spinors.* J. Math. Anal. appl., **25**, 537—555 (1969).
4. Vrănceanu Gh., *Leçons de géométrie différentielle.* Vol. I—II, Buc., 1957.

CONSIDÉRATIONS SUR LA DÉRIVÉE DE LIE DES SPIN-TENSEURS

(Résumé)

Dans cette Note, prenant comme point de départ les résultats obtenus de Mlle I. Kosmann dans [1], on fait certaines considérations sur la dérivée de Lie du spin-tenseur K^{α}_{ij} introduit dans [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.D. 519.5

ON THE RECURSIVENESS OF CONTEXT-SENSITIVE LANGUAGES

BY

ANCA PASCU

Notation

: implies
$\leftrightarrow$ equivalent
N: the set of natural numbers
$\forall$: for all
$\exists$: there exists
$\equiv$: identity
$\circ$: composition of functions
$|M|$: the cardinal of the set M
$|w|$: the length of w

The recursiveness of the context-sensitive languages (and also context-free and regular languages) is proved in the theory of formal languages [2] by accepting the following definition of a recursive language : A language is called recursive if there exists an algorithm for recognizing the language (for any word the algorithm checks if it belongs to the language or not). Reference [2] proves the following theorem :

T h e o r e m 1. *Let* $G=(V_N, V_T, P, S)$ *be a context-sensitive grammar. The language generated by* G, $L(G)$ *is recursive.*

The p r o o f of this Theorem relies on the construction of a string of sets :

$$T_0 = \{S\}$$

$$T_m = T_{m-1} \cup \{\alpha / \exists \beta \in T_{m-1},\ \beta \Rightarrow \alpha,\ |\alpha| \leqslant n\} \text{ where } n = |w|,\ w \in V_T^+ .$$

One can prove that : $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_m \subseteq T_{m+1} \subseteq \ldots$ and that there exists m_0, $m_0 \in N$ with $T_{m_0} = T_{m_0+1} = \ldots$

Taking into account the definition of the general-recursive sets from the theory of recursive functions [1], one can show that the context-sensitive languages (and also context-free and regular languages) are general-recursive sets. The definition is the following.

D e f i n i t i o n 1. Let M be any set (not necessarily $M \subset N$) and $E \subset M$; the set E is called general-recursive if there exists a natural numbering f, f: $N \to M$ such that $f(E)$ is general-recursive set according to the concept of general recursiveness for natural number sets.

We shall prove the following :

Theorem 2. *Any context-sensitive language is a general-recursive set.*
Proof. Theorem 1 gives the string of sets :

$$T_0^{(n)},\ T_1^{(n)},\ \ldots\ T_k^{(n)}\ \ldots,$$

where $T_i^{(n)}$ is the ith set of the string corresponding to a word of length n. It is clear that : $\forall n,\ \exists\, k_n$ so that $T_{k_n}^{(n)} = T_{k_{n+1}} = \ldots$ and $T_{k_n}^{(n)}$ is a finite set. One can write the language L in the following way :

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T_{k_n}^{(n)} \cap V_T^*).$$

We shall show that L is a general-recursive set according to the .Definition 1 We first construct a bijective function $f : V_T^* \to N$. We suppose that $|V_T| = k$, $|V| = 1$ with $1 > k$, where $V = V_T \cup V_N$; Let N_k be the set of systems of any length the components of which are elements of the set $N_k = \{1, 2, \ldots k\}$ only.

We suppose : $V_T = \{a_1, \ldots a_k\}$. Let $g : V_T^* \to N_k$ defined like that : $g(\varepsilon) = \lambda$, where λ is the empty system, $g(a_{i_1} \ldots a_{i_l}) = < i_1 \ldots i_l >$ for all $a_{i_1}, \ldots, a_{i_l} \in V_T^*$. g is a bijective function. Let's define $h_k : N_k^{\infty} \to N$ with

$$\begin{aligned} &h_k(\lambda) = 0,\\ &h_k(<1>) = 1,\\ &\vdots\\ &h_k(<k>) = k. \end{aligned}$$

Therefore $<p_1, \ldots, p_S> \in N_k^{\infty}$, $s \geqslant 2 \to p_i \in N_k$ $i = 1, \ldots, s$; s is the length of the system (the number of its components).

$$h_k(< p_1 \ldots p_s >) = k + k^2 + \ldots k^{s-1} + (p_1 - 1)k^{s-1} + (p_2 - 1)k^{s-2} + \ldots + p_s k^0.$$

h_k is a bijective function. It is obtained from the functions Sum, Pd, Prod and Exp by substitutions and therefore it is a primitive-recursive function [1]. N_k is a primitive-recursive set and a general-recursive set. We define $f : V_T^* \to N$ by $f = h_k \circ g$.

f is a bijective function. We suppose that $|V| = 1$; let $V = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l\}$ where $V_T = \{a_1, \ldots, a_k\}$. We similarly define $f_1 : V^* \to N$ by $f_1 = h_l \circ g_1$ where $g_1 : V^* \to N$ is defined in the same way as g.

f_1 is a bijective function. $T_{k_n}^{(n)} \subset V^*$, where $T_{k_n}^{(n)}$ is finite for all n. It results that $g_1(T_{k_n}^{(n)})$ is finite and $h_1(g_1(T_{k_n}^{(u)}))$ is finite too.

$$g_1(T_{k_n}^{(n)}) \subset N_l^{\infty} \quad \text{and} \quad h_l(g_1(T_{k_n}^{(n)})) \subset N.$$

It results that $h_l(g_1(T_{k_n}^{(n)}))$ is a primitive-recursive set and that $h_l(g_1(T_{k_n}^{(n)}))$ is a general-recursive set. $g_1(T_{k_n}^{(n)})$ is general-recursive

$$N_k^{\infty} \subset N_l^{\infty} \quad \text{and} \quad g = g_1 / V_T^*.$$

We define $\varphi : L \to A = \bigcup_{n=1} (g_1 (T_{k_n}^{(n)}) \cap N_k^{\infty})$, $x \in L \to x \in V_T^*$ and $\exists\, n$ with $x \in T_{k_n}^{(n)}$. $\varphi(x) = g_1(x) = g(x)$; φ is a bijective function. We show that A is a general-recursive set.

$$x' \in A \Leftrightarrow (\underset{n \leqslant l(x')}{\exists n}) [x' \in g_1 (T_{k_n}^{(n)}) \cap N_k^{\infty}], \quad n \leqslant l(x').$$

We denote by $l(x')$ the length of system x'. For all n, $g_1(T_{k_n}^{(n)}) \cap N_k^{\infty}$ is a general-recursive set because it is the intersection of two general-recursive sets. It is also a primitive-recursive set.

The predicate $P(n, x') \equiv x' \in g_1 (T_{k_n}^{(n)}) \cap N_k^{\infty}$ is a primitive-recursive one.

$$P(x') \equiv (\underset{n \leqslant l(x')}{\exists n}) [x' \in g_1 (T_{k_n}^{(n)}) \cap N_k^{\infty}]$$

is a primitive-recursive predicate.

The predicate $Q(x') \equiv x' \in A$ is a general-recursive one (it is even a primitive-recursive one). So A is a general-recursive set, (even primitive-recursive). We have : $A \subset N_l^{\infty}$.

Let's write $L \xrightarrow{\varphi} N_l^{\infty} \xrightarrow{h_l} N$. $h_l \circ \varphi$ is a bijective function. $\varphi(L) = A$ and $h_l(\varphi(L)) = h_l(A)$, $h_l(A) \subset N$.

The fact that A is a primitive-recursive set implies that $h_l(A)$ is a primitive recursive set so that $h_l(A)$ is a general-recursive set.

$$L = (h_l \circ \varphi)^{-1} \ (h_l(A)).$$

Let φ_1 be the function :

$$\varphi_1 : N \to L \qquad \varphi_1 = (h_l \circ \varphi)^{-1};$$

φ_1 is a bijective function :

$$\varphi_1^{-1}(L) = h_l(A).$$

$\varphi_1^{-1}(L)$ is a general-recursive set and L is a general-recursive set. Thus the Theorem is proved.

Remark 1. We have used as definition of a primitive (general)-recursive predicate the following one : A predicate is a primitive (general)-recursive one if its truth set is a primitive (general)-recursive set.

Remark 2. We have supposed $\varepsilon \notin L$. If we are going to consider context-sensitive languages with $\varepsilon \in L$, we must take : $T_{k_0}^{(0)} = \{\varepsilon, S\}$ for $n = 0$ and $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} (T_{k_n}^{(n)} \cap V_T^*)$.

Received September 15, 1975 *Academy „Ştefan Gheorghiu", Bucharest*

REFERENCES

1. Успурский В. А., *Лекции о вычислимых функциях*. Москва, 1960.
2. Hopcroft J. E., Ullmann J. D., *Formal Languages and their Relations to Automata*. Academic Press, New York, 1969.

ASUPRA RECURSIVITĂŢII LIMBAJELOR DEPEDENTE DE CONTEXT

(Rezumat)

Se demonstrează că orice limbaj dependent de context este o mulţime general recursivă, în sensul definiţiilor din teoria funcţiilor recursive.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.Z. 513.3

CIRCULAŢIE ÎN GRAFURI TRASATE ARBITRAR

DE

VIOREL GHIUŞ şi I. ONCIULENCU

Fie un graf finit, neorientat, conex, $G = [N, A]$ pe muchiile căruia se definesc funcţiile negative $F(x, y)$, $l(x, y)$, $c(x, y)$ cu $l(x, y) \leqslant c(x, y)$ oricare ar fi $(x, y) \in A$. Pentru orice nod $x \in N$, notăm cu M_x mulţimea tuturor muchiilor din graf incidente cu nodul x. Presupunem că există măcar o partiţie a mulţimii M_x de forma

$$M_x = A_x \cup \bar{A}_x \quad \text{cu} \quad A_x \neq \emptyset \quad \text{şi} \quad \bar{A}_x \neq \emptyset.$$

Vom concepe o circulaţie în graful G, ca o funcţie definită pe A care satisface la condiţiile:

$$F(A_x) = F(\bar{A}_x) \quad \text{pentru orice} \quad x \in N, \tag{1}$$

$$l(x, y) \leqslant F(x, y) \leqslant c(x, y) \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in A, \tag{2}$$

unde $F(A_x) = \sum_{(x,?) \in A_x} F(x, ?)$ şi $F(\bar{A}_x) = \sum_{(?,x) \in \bar{A}_x} F(?, x)$.

Din definiţie rezultă că orice muchie a grafului G în care se defineşte o circulaţie, trebuie să aparţină la cel puţin un circuit. Aceasta implică că graful G trebuie să fie un graf frunză [2]. Dar orice graf frunză se poate descompune în grafuri lob, disjuncte muchial; oricare două subgrafuri lob diferite au cel mult un singur nod în comun [2]. Cu alte cuvinte, graful frunză este un graf cactus.

În cele ce urmează vom studia problema circulaţiei, în special, asupra grafurilor lob.

Din considerentele de mai sus rezultă că nu putem vorbi de o circulaţie într-un graf cu muchii terminale, într-un arbore şi în general într-un graf aciclic. Se ştie că o muchie este muchie de separaţie dacă şi numai dacă ea nu este o muchie circuit [2]. Deci nu putem vorbi de o circulaţie într-un graf care are muchii de separaţie.

Să presupunem că graful lob este de forma unui circuit C.

Teorema 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca într-un circuit C să existe o circulaţie, este ca să fie îndeplinită condiţia:*

$$\max_{(x,y) \in C} l(x, y) \leqslant \min_{(x,y) \in C} c(x, y). \tag{3}$$

Necesitatea. Fie $u, \ldots, x, y, \ldots, v$ nodurile circuitului C și presupunem că există o circulație:

$$F(u, ?) = \ldots = F(x, y) = \ldots = F(?, v) = F(v, u) = \alpha$$

și

$$l(x, y) \leqslant F(x, y) \leqslant c(x, y) \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in C.$$

Rezultă că

$$\max_{(x,y) \in C} l(x, y) \leqslant \alpha \leqslant \min_{(x,y) \in C} c(x, y)$$

adică (3).

Suficiența. Condiția (3) ne permite să definim:

$$F(x, y) = \max_{(x,y) \in C} l(x, y) \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in C.$$

În felul acesta sînt satisfăcute condițiile (1) și (2).

Observația 1. Dacă există cel puțin un arc $(x, y) \in C$ cu proprietatea că $l(x, y) = c(x, y)$ și se poate defini o circulație, ea este unică.

Observația 2. Dacă $\max_{(x,y) \in C} l(x, y) = \min_{(x,y) \in C} c(x, y)$, există o circulație unică și ea saturează cel puțin un arc al circuitului.

Corolar 1. *Într-un graf trasat arbitrar dintr-un nod, există o circulație, dacă există cîte o circulație pe fiecare circuit* C_i $(i=1, \ldots, n)$, *ce intră în compunerea grafului. Adică*:

$$\max_{(x,y) \in C_i} l(x, y) \leqslant \min_{(x,y) \in C_i} c(x, y) \quad \textit{pentru orice} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolar 2. *Într-un graf frunză, compus numai din loburi de tip graf trasat arbitrar dintr-un nod, există o circulație dacă și numai dacă există o circulație în fiecare lob.*

Să considerăm un graf lob constituit dintr-o mulțime de drumuri L_i în număr finit cu $i \in M$, disjuncte muchial; în plus aceste drumuri au în comun numai două noduri, noduri care sînt extremitățile lui L_i pentru orice $i \in M$. Un astfel de graf se numește graf trasat arbitrar din două noduri sau scul [2].

Notăm cu $l_i = \max_{(x,y) \in L_i} l(x, y)$ și $c_i = \min_{(x,y) \in L_i} c(x, y)$ pentru orice $i \in M$.

Observație. Dacă există o circulație într-un scul, necesar $l_i \leqslant c_i$ pentru orice $i \in M$, căci $l_i \leqslant F(L_i) \leqslant c_i$ conform lui (2).

Fie $M = A \cup \bar{A}$ cu $A \neq \varnothing$ și $\bar{A} \neq \varnothing$.

Notăm $l = \max(l_A, l_{\bar{A}})$ și $c = \min(c_A, c_{\bar{A}})$, unde

$$l_A = \sum_{i \in A} l_i, \quad l_{\bar{A}} = \sum_{j \in A} l_j, \quad c_A = \sum_{i \in A} c(L_i) \quad \text{și} \quad c_{\bar{A}} = \sum_{j \in \bar{A}} c(L_j).$$

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca într-un graf scul să existe o circulație, este ca să existe o partiție a mulțimii de indici* M *și* $\bar{A}$ *astfel încît*

(4) $$l \leqslant c.$$

N e c e s i t a t e a. Presupunem că există o circulaţie într-un scul:

(1) $$F_A = F_{\bar{A}},$$

(2′) $$\begin{cases} l_A \leqslant F_A \leqslant c_A, \\ l_{\bar{A}} \leqslant F_{\bar{A}} \leqslant c_{\bar{A}}, \end{cases}$$

unde $$F_A = \sum_{i \in A} F(L_i) \quad \text{şi} \quad F_{\bar{A}} = \sum_{j \in \bar{A}} F(L_j).$$

Din (1′) şi (2′) rezultă:

$$\max(l_A, l_{\bar{A}}) \leqslant F_A = F_{\bar{A}} \leqslant \min(c_A, c_{\bar{A}}),$$

adică relaţia (4).

S u f i c i e n ţ a. Dacă avem $M = A \cup \bar{A}$ şi $l \leqslant c$ putem defini:

$$F_A = F_{\bar{A}} = l$$

şi se obţine o circulaţie, orientînd fluxul pe drumurile L_i, $i \in A$ contrar cu fluxul pe drumurile $L_j, j \in \bar{A}$.

Observaţia 1. Dacă $l = c$, există o circulaţie unică.

Observaţia 2. Graful scul din Teorema 2 poate fi condensat într-un circuit format din două muchii pe care le notăm cu A şi $\bar{A}$. Dacă definim $l(A) = l_A$, $l_{\bar{A}} = l(\bar{A})$, $c(A) = c_A$ şi $c(\bar{A}) = c_{\bar{A}}$, condiţia (4) a teoremei (2) se reduce la condiţia (3) a teoremei (1).

Observaţia 3. Într-un graf frunză G care are drept subgrafuri lob numai sculuri G_i $(i = 1, \ldots, n)$, o circulaţie în G se reduce la cîte o circulaţie în fiecare G_i supuse la condiţii de tipul (4).

C o r o l a r 1. *Dacă există o partiţie a mulţimii M în A şi $\bar{A}$ astfel încît $l_A = l_{\bar{A}}$, există o circulaţie.*

C o r o l a r 2. *Dacă există o partiţie a mulţimii M în A şi $\bar{A}$ astfel încît $c_A = c_{\bar{A}}$, există o circulaţie.*

C o r o l a r 3. *Dacă există o partiţie a mulţimii M în A şi $\bar{A}$ astfel încît $l_A = c_{\bar{A}}$ $(l_{\bar{A}} = c_A)$, există o circulaţie.*

C o r o l a r 4. *Dacă există o partiţie a mulţimii M în A şi $\bar{A}$ astfel încît $l_A \leqslant l_{\bar{A}} \leqslant c_A$ $(l_{\bar{A}} \leqslant l_A \leqslant c_{\bar{A}})$, există o circulaţie.*

C o r o l a r 5. *Dacă există o partiţie a mulţimii M în A şi $\bar{A}$ astfel încît: $l_{\bar{A}} \leqslant c_A \leqslant c_{\bar{A}}$ $(l_A \leqslant c_{\bar{A}} \leqslant c_A)$, există o circulaţie.*

C o r o l a r 6. *Dacă există o partiţie a mulţimii M în A şi $\bar{A}$ astfel încît $c_A \leqslant c_{\bar{A}}$ $(c_{\bar{A}} \leqslant c_A)$ şi $l_{\bar{A}} \leqslant l_A$ $(l_A \leqslant l_{\bar{A}})$, există o circulaţie.*

Fie un graf lob de forma circuit de sculuri, cu nodurile circuitului $u, \ldots, x, y, \ldots, v$. Notăm cu $I = \{\ldots (x, y) \ldots\}$ mulţimea tuturor perechilor de noduri consecutive ce separă sculurile circuitului şi cu M_{xy} mulţimea indicilor drumurilor simple L_k de la x la y.

Considerăm mărimile:

$$l_{xy} = \sum_{k \in M_{xy}} l_k \quad \text{şi} \quad c_{xy} = \sum_{k \in M_{xy}} c(L_k) \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in I.$$

Teorema 3. *Condiția necesară și suficientă ca un graf lob L, de forma circuit de loburi să poată fi redus la un graf frunză de tipul celui din Observația 3 din punct de vedere al unei circulații, este ca să fie satisfăcută condiția :*

$$\min_{(x,y)\in I} l_{xy} \leqslant c_{uv} \quad \textit{pentru orice} \quad (u, v) \in I. \tag{5}$$

Necesitatea. O demonstrăm prin reducere la absurd : presupunem că există o pereche (u, v), astfel încît $\min_{(x,y)\in I} l_{xy} > c_{uv}$. Mai avem evident $l_{uv} \geqslant \min_{(x,y)\in I} l_{xy}$.

Din ultimile două relații rezultă $l_{uv} > c_{uv}$ ceea ce este absurd.

Suficiența. Definim :

$$F_{xy} = \min_{(u,v)\in I} c_{uv} \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in I,$$

$$l'_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad l_{xy} \leqslant F_{xy} \\ l_{xy} - F_{xy} & \text{dacă} \quad l_{xy} > F_{xy} \end{cases}$$

și

$$c'_{xy} = c_{xy} - F_{xy}.$$

Evident măcar un scul din L va avea drumurile saturate (acelea în care este atins $\min_{(u,v\in I} c_{uv}$) și graful L se transformă în graful frunză specificat. Aici se va pune problema existenței unei circulații F'_{xy} supusă la condiția :

$$l'_{xy} \leqslant F'_{xy} \leqslant c'_{xy}.$$

Primită la 19 februarie 1976

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Ford L. R., Fulkerson D. R., *Flows in Networks*. Princeton University, 1962.
2. Ore O., *Theory of Graphs*. American Society Colloquium Publications, Providence, Rhode Island, Vol. XXXVIII, 1962.

LA CIRCULATION DANS LES GRAPHES TRACÉS ARBITRAIREMENT

(Résumé)

On étudie le problème de la circulation dans des graphes tracés arbitrairement d'un seul sommet, dans des graphes tracés arbitrairement de deux sommets et dans des combinaisons de ces types.

Ainsi on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une circulation dans cettes catégories de graphes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.D. 513.8

SUR LES ESPACES FINSLER BI-RÉCURRENTS

PAR

GH. ANDRICIOAEI

1. Dans ce travail on donne une généralisation de la notion d'espace Finsler récurrent de deuxième ordre introduit dans [3] et on étudie les propriétés des tenseurs de courbure de Berwald de ces espaces.

2. Dans un espace Finsler F_n, les tenseurs de courbure de Berwald H^i_k, H^i_{jk}, $H^i_{h\,jk}$ satisfont les formules

$$H^h_{ih} = H_i, \quad H^h_{i\,jh} = \frac{\partial H_j}{\partial \dot{x}^i} = H_{ij}, \quad H^i_i = (n-1)\,H, \tag{1.1}$$

$$H^i_{h\,jk}\,\dot{x}^h = H^i_{jk}, \quad H^i_{jk}\,\dot{x}^j = H^i_k, \quad H_{jk}\,\dot{x}^j = H_k, \quad H_i\,\dot{x}^i = (n-1)\,H, \tag{1.2}$$

$$T_{(h)(k)} - T_{(k)(h)} = -\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\,H^r_{hk}. \tag{1.3}$$

Aussi, les identités de Bianchi sont

$$\text{a) } H^i_{h\,jk} + H^i_{khj} + H^i_{jkh} = 0, \qquad \text{b) } H^r_{ik(l)} + H^r_{li(k)} + H^r_{kl(i)} = 0,$$

$$\text{c) } H^r_{k(l)} - H^r_{l(k)} + H^r_{kl(i)}\,\dot{x}^i = 0. \tag{1.4}$$

On dit [2] que l'espace Finsler F_n est récurrent, si le tenseur de courbure H^i_{jkh} satisfait la relation $H^i_{h\,jk(m)} = v_m H^i_{h\,jk}$, où v_m est le vecteur de récurrence. D'après [1] nous noterons par (m) la dérivée covariante par rapport à x^m.

Un espace Finsler F_n est récurrent de deuxième ordre d'après [3] s'il existe un tenseur a_{lm}, tel que, $H^i_{h\,jk(l)(m)} = a_{lm} H^i_{h\,jk}$, où a_{lm} est le tenseur de récurrence.

3. Nous considérons les relations de récurrence

$$H^i_{h\,jk(l)(m)} = u_m H^i_{h\,jk(l)} + a_{lm} H^i_{h\,jk}, \tag{2.1a}$$

$$H^i_{h\,jk(l)(m)} = v_l H^i_{h\,jk(m)} + b_{lm} H^i_{h\,jk}. \tag{2.1b}$$

Ainsi nous avons

D é f i n i t i o n. L'espace Finsler F_n dans lequel le tenseur $H^i_{h\,jk} \not\equiv 0$ satisfait la relation (2.1a) (respectivement (2.1b)), s'appelle espace Finsler

bi-récurrent avec le vecteur de récurrence u_m (respectivement v_l) et le tenseur de récurrence a_{lm} (respectivement b_{lm}). Brièvement, nous l'appellerons espace Finsler (u, a)-recurrent (respectivement (v, b)-récurrent).

Si dans (2.1a) et (2.1b) on pose $u_m \equiv 0$, respectivement $v_l \equiv 0$, on obtient la définition d'espace Finsler récurrent de deuxième ordre [3].

P r o p o s i t i o n. *Si l'espace F_n est récurrent avec le vecteur de récurrence v, alors il est (v, b)-récurrent, où $b_{lm} = v_{m(l)}$.*

En effet, en dérivant covariant la relation $H^i_{h\,jk(m)} = v_m H^i_{h\,jk}$ par rapport à x^l, nous avons

$$H^i_{h\,jk(m)(l)} = v_m H^i_{h\,jk(l)} + v_{m(l)} H^i_{h\,jk}, \quad \text{c.q.f.d.} \tag{2.2}$$

En multipliant les relations (2.1a) et (2.1b) successivement avec $\dot{x}^h$ et $\dot{x}^j$, nous avons d'après (1.2)

$$\text{a) } H^i_{jk(l)(m)} = u_m H^i_{jk(l)} + a_{lm} H^i_{jk}, \quad \text{b) } H^i_{jk(l)(m)} = v_l H^i_{jk(m)} + b_{lm} H^i_{jk}; \tag{2.3}$$

$$\text{a) } H^i_{k(l)(m)} = u_m H^i_{k(l)} + a_{lm} H^i_k, \quad \text{b) } H^i_{k(l)(m)} = v_l H^i_{k(m)} + b_{lm} H^i_k. \tag{2.4}$$

En contractant dans (2.1), (2.3) et (2.4) les indices i et k et en utilisant les relations (1.1), on obtient

$$\text{a) } H_{hj(l)(m)} = u_m H_{hj(l)} + a_{lm} H_{hj}, \quad \text{b) } H_{hj(l)(m)} = v_l H_{hj(m)} + b_{lm} H_{hj}; \tag{2.5}$$

$$\text{a) } H_{j(l)(m)} = u_m H_{j(l)} + a_{lm} H_j, \quad \text{b) } H_{j(l)(m)} = v_l H_{j(m)} + b_{lm} H_j; \tag{2.6}$$

$$\text{a) } H_{(l)(m)} = u_m H_{(l)} + a_{lm} H, \quad \text{b) } H_{(l)(m)} = v_l H_{(m)} + b_{lm} H. \tag{2.7}$$

En utilisant (1.3), nous avons de (2.7) les relations

$$-\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^r} H^r_{lm} = u_m H_{(l)} - u_l H_{(m)} + (a_{lm} - a_{ml}) H, \tag{2.8}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^r} H^r_{lm} = v_l H_{(m)} - v_m H_{(l)} + (b_{lm} - b_{ml}) H. \tag{2.8'}$$

Si on dérive covariant (1.4a) par rapport à x^l et x^m et si on utilise (2.1a), cela est identiquement vérifiée. Puis, en dérivant covariant (1.4b) et en tenant compte de (2.3) et de (1.4b), on a

$$a_{lm} H^r_{ik} + a_{km} H^r_{li} + a_{im} H^r_{kl} = 0. \tag{2.9}$$

Maintenant si on introduit le tenseur

$$\Omega^{rs}_{ikl} = H^r_{ik}\delta^s_l + H^r_{li}\delta^s_k + H^r_{kl}\delta^s_i, \tag{2.10}$$

alors nous avons évidemment $\Omega^{rs}_{ikl} = \Omega^{rs}_{kli} = \Omega^{rs}_{lik}$ et

$$\Omega^r_{ik} = \Omega^{rs}_{iks} = (n-2) H^r_{ik}, \qquad \Omega_i = \Omega^r_{ir} = (n-2) H_i. \tag{2.11}$$

En écrivant la relation (2.10) sous la forme

$$a_{sm} \Omega^{rs}_{ikl} = 0, \tag{2.12}$$

nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Une condition nécessaire pour que l'espace Finsler soit* (u, a)*-récurrent est*

$$\text{rang} \parallel \Omega^{rs}_{ikl} \parallel < n. \tag{2.13}$$

En prenant la dérivée covariante de la relation (1.4c) et en tenant compte de (2.3a) et (2.4a), on a

$$a_{lm}H^r_k - a_{km}H^r_l + a_{im}H^r_{kl}\dot{x}^i = 0 \tag{2.14}$$

ce qui peut être écrite sous la forme

$$a_{im}U^{ri}_{kl} = 0, \tag{2.15}$$

où

$$U^{ri}_{kl} = H^r_k\delta^i_l - H^r_l\delta^i_k + H^r_{kl}\dot{x}^i. \tag{2.16}$$

De ce tenseur, on obtient par contraction

$$\begin{gathered} U^{i}_{k\cdot} = U^{ir}_{kr} = -U^{i}_{\cdot k} = -U^{ir}_{rk} = (n-2)H^i_k, \\ U^{\cdot r}_{k\cdot} = U^{ir}_{ki} = -U^{ir}_{ik} = -U^{\cdot r}_{\cdot k} = H^r_k - (n-1)H\delta^r_k + H_k\dot{x}^r, \\ U = U^{i}_{i\cdot} = -U^{i}_{\cdot i} = -U^{\cdot i}_{i\cdot} = U^{\cdot i}_{\cdot i} = (n-1)(n-2)H. \end{gathered} \tag{2.17}$$

De (2.11), (1.2) et 2.17) il résulte que nous avons la relation

$$\Omega_i\dot{x}^i = U. \tag{2.18}$$

En partant de (2.15) nous avons le

Théorème 2.2. *Une condition nécessaire pour que l'espace Finsler soit* (u, a)*-récurrent est*

$$\text{rang} \parallel U^{ri}_{kl} \parallel < n. \tag{2.19}$$

Pour les espaces Finsler (v, b)-récurrents, si on dérive covariant deux fois l'identité (1.4a) compte tenu de (2.1b), cela est identiquement vérifiée. Puis, en dérivant covariant (1.4b) par rapport à x^m et en utilisant (2.3b) et (2.11), on obtient

$$v_s\Omega^{rs}_{ikl(m)} + b_{sm}\Omega^{rs}_{ikl} = 0. \tag{2.20}$$

La dérivation covariante de la relation (1.4c) et les relations (2.3b), (2.4b) et (2.16) nous donnent

$$v_iU^{ri}_{kl(m)} + b_{im}U^{ri}_{kl} = 0. \tag{2.21}$$

Reçue le 20 Avril 1976

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Rund H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces.* Springer Verlag, 1959.
2. Sinha B. B., Singh S. P., *On Recurrent Finsler Spaces.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **16(6)**, 977–986 (1971).

3. Sinha B. B., Singh S. P., *Recurrent Finsler Spaces of second Order*. Yokohama Math. J., **19**, 79–85 (1971).

ASUPRA SPAŢIILOR FINSLER BI-RECURENTE

(Rezumat)

Se introduc noţiunile de (u, a)-recurenţă şi (v, b)-recurenţă pentru spaţiile Finsler, care generalizează recurenţa de ordinul al doilea a acestor spaţii, studiată în [3]. Se pun în evidenţă tensorii Ω^{rs}_{ikl} şi U^{rl}_{kl} cu ajutorul cărora se studiază recurenţa introdusă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.D. 517 9

POISSON'S FORMULA FOR THE TWO DIMENSIONAL WAVE EQUATION

BY

EVELYN OBAID

1. Introduction

Traditionally most presentations of the wave equation employ the method of descent to arrive at Kirchhoff's, Poisson's and d'Alembert's formulae for the solutions of the three, two and one dimensional wave equations. Such excellent books as those by P e t r o v s k i i [5] and S t a k g o l d [6] illustrate this procedure well.

Direct solution by Fourier transform, usually used in three dimensions (see W e i n b e r g e r's lucid presentation [8]), is also readily employable in one dimension (K r a l l [3]). Its direct application in two dimensions seems more difficult, however, and does not seem to appear in the literature, even in C o u r a n t and H i l b e r t's second volume [2].

We hope the reader will find what follows of interest. We believe it to be somewhat novel since the Fourier sine transform of J_0 is involved at one of the critical steps.

2. Poisson's Formula

Consider the Cauchy problem for the two dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}\right] = 0, \tag{1}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = f_1(x_1, x_2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = f_2(x_1, x_2), \tag{3}$$

over E^2. From S t o k e s Rule [3], it suffices to consider the case when $f_1(x_1, x_2) \equiv 0$. Applying the two dimensional Fourier transform to (1), (2), and (3) we obtain

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \|y\|V = 0, \tag{4}$$

$$V(0) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{dV(0)}{dt} = F_2(y_1, y_2), \tag{6}$$

where V and $F_2(y_1, y_2)$ are the two-dimensional Fourier transforms of $u(x_1, x_2, t)$ and $f_2(x_1, x_2)$, respectively, and $\|.\|$ denotes the Euclidean norm on E^2.

Solving (4) and applying the initial conditions (5) and (6) we find

$$V(y_1, y_2, t) = \frac{F_2(y_1, y_2)}{\|y\|} \sin \|y\| t. \tag{7}$$

Hence

$$u(x_1, x_2, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(y_1, y_2) \frac{\sin \|y\| t}{\|y\|} e^{i(x_1y_1 + x_2y_2)} \, dy_1 dy_2. \tag{8}$$

Substituting the integral for $F_2(y_1, y_2)$ in (8) we obtain

$$u(x_1, x_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi_1, \xi_2) e^{-i[y_1(\xi_1 - x_1) + y_2(\xi_2 - x_2)]} \frac{\sin \|y\| t}{\|y\|} \, d\xi_1 d\xi_2 dy_1 dy_2. \tag{9}$$

It is at this point that further evaluation becomes more difficult.

Interchaging the order of integration and making the change of variables

$$y_1 = \rho \cos \Phi, \qquad y_2 = \rho \sin \Phi, \quad r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2},$$

the solution becomes

$$u(x_1, x_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-ir\rho \cos \Phi} \sin \rho t \, d\rho \, d\Phi f_2(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 d\xi_2. \tag{10}$$

We can evaluate $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos \Phi} d\Phi$ by using Parseval's formula [4]:

Let $R > 0$, and for $|z| < R$ let

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Then if $0 \leqslant r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Phi})|^2 \, d\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Using Parseval's formula with

$$f(re^{i\Phi}) = e^{z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!}, \quad z = re^{i\Phi},$$

$$|f(re^{i\Phi})|^2 = |e^{z/2}|^2 = e^{r\cos\Phi},$$

we obtain

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{r\cos\Phi} \, d\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Phi})|^2 \, d\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n} r^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = J_0(ir).$$

Since both the integral and the series represent an entire function, and since they agree for real $z = r \geqslant 0$, by the uniqueness theorem [1] they must agree for all z. Thus

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\Phi} \, d\Phi = J_0(iz). \tag{11}$$

If we let $z = -ir\rho$ in (11) we find

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos\Phi} \, d\Phi = J_0(r\rho).$$

Hence

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi_1, \xi_2) \int_0^{\infty} J_0(r\rho) \sin \rho t \, d\rho d\xi_1 d\xi_2.$$

Utilizing the formula (7)

$$\int_0^{\infty} J_0(r\rho) \sin t\rho \, d\rho = \begin{cases} 0 & t < r \\ \infty & t = r, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} & t > r, \end{cases}$$

we find

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{r<t} \frac{f_2(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} \, d\xi_1 d\xi_2$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_t} \frac{f_2(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_1 - x_2)^2}}\, d\xi_1 d\xi_2,$$

where C_t is a circle of radius t, centered at (x_1, x_2).

Applying Stoke's Rule, we find that the solution to the general problem is

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_t} \frac{f_2(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\, d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{C_t} \frac{f_1(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\, d\xi_1 d\xi_2,$$

which is in agreement with the solution obtained by the method of descent.

Received January 1, 1976

Pennsylvania State University,
Mathematics Department, U.S.A.

REFERENCES

1. Ahlfors L. V., *Compl x Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1953, p. 102.
2. Courant R., Hilbert D., *Methoden der Mathematischen Physik,* II. Springer, Berlin, 1937.
3. Krall A., *Linear Methods of Analysis.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973, p. 619,
4. Levenson N., Redheffer R., *Complex Variables.* Holden-Day, San Francisco. 1970, pp. 357, 361.
5. Petrovskii I. G., *Partial Differential Equations.* W. B. Saunders, Philadelphia, 1967.
6. Stakgold I., *Boundary Value Problems of Mathematical Physics,* II. MacMillan, New York, 1968.
7. Watson G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* MacMillan, New York, 1944, p. 405.
8. Weinberger H. F., *A first Course in Partial Differential Equations.* Blaisdell, Toronto, 1965.

FORMULĂ POISSON PENTRU ECUAŢIA UNDELOR BIDIMENSIONALE

(Rezumat)

Se stabileşte o formulă care dă soluţia ecuaţiei undelor pentru cazul bidimensional, utilizînd metoda transformatei Fourier.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secția I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 518.8

ECUAȚII DIFERENȚIALE ANALITICE ÎN SPAȚII BANACH (II)

DE

I. ONCIULENCU

1. În această Notă, se dă o generalizare a ideii de ecuație diferențială analitică din [4], folosind derivata Fréchet și funcții definite într-un spațiu Banach cu valori în alt spațiu Banach. Noțiunea de funcție analitică este definită cu ajutorul noțiunii de polinom omogen, definit în [1].

Se demonstrează că, în ipoteze analoge cu cele din cazul scalar, problema lui Cauchy pentru astfel de ecuații are soluție analitică unică.

2. D e f i n i ț i e ([1]). Fie E și F două spații vectoriale peste un cîmp K. Aplicația $\varphi_n : E \to F$ se numește polinom omogen de grad n, dacă există o aplicație n-liniară $f_n : E^n \to F$ încît $\varphi_n(x) = f_n(x, x, ..., x)$, $\forall x \in E$.

Funcțiile $\varphi_o : E \to F$, constante, sînt prin definiție polinoame omogene de grad 0.

Observații. I. Dacă $f : E^n \to F$ generează polinomul omogen φ_n, atunci $g_n : E^n \to F$ unde $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, i_n)} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{in})$ este o formă n-liniară simetrică și $\varphi_n(x) = g_n(x, x, \ldots, x)$.

II. Dacă notăm cu $(\Delta_h \varphi_n)(x) = \varphi_n(x + h) - \varphi(x)$ și dacă $\varphi_n : E \to F$ este un polinom omogen de grad n, definit cu forma n-liniară simetrică $f_n : E^n \to F$ atunci $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta_{x_1} \Delta_{x_2} \ldots \Delta_{x_n} \varphi_n$.

Astfel, un polinom omogen de grad n se poate reprezenta întotdeauna în mod unic, printr-o formă n-liniară simetrică.

Convenim să notăm în continuare, cu aceeași literă, atît polinomul omogen de grad n cît și forma n-liniară care-l determină.

III. *Derivatele Fréchet ale unui polinom omogen.* Fie acum E și F două spații Banach și $\varphi_n : E \to F$ un polinom omogen de grad n. Mai presupunem că forma n-liniară simetrică $\varphi_n : E^n \to F$ este continuă.

Atunci polinomul φ_n are derivate Fréchet de orice ordin :

$$(\varphi_n'(x))(h) = n\varphi_n(\underbrace{x, x, \ldots x}_{(n-1)\ ori}, h),$$

. . . . . .

$$(\varphi_n^{(k)}(x))(h_1, h_2, \ldots, h_k) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\,\varphi_n(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n-k\ ori}, h_1, \ldots, h_k),$$

. . . . . .

$$(\varphi_n^{(n)}(x))(h_1, h_2, \ldots, h_n) = n!\varphi_n(h_1, h_2, \ldots, h_n), \quad (\varphi_n^{(n+k)}(x)) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

IV. *Serii de polinoame omogene continui. Fie*

$$\varphi : U \cup E \to F \quad \text{şi} \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \quad \forall x \in U,$$

unde $\varphi_n(x)$ este un polinom omogen de grad n determinat de forma n-liniară simetrică continuă $\varphi_n : E^n \to F$, iar U o vecinătate a originii din E.

Atunci $\varphi(x)$ are derivate Fréchet de orice ordin şi au loc relaţiile :

$$\varphi_0 = \varphi(0), \quad \varphi_1(x) = \varphi'(0)(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x) = \frac{1}{n!}(\varphi^{(n)}(0))(x, \ldots, x).$$

Deci o dezvoltare în serie de polinoame omogene, este unic determinată.

Dacă mai presupunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\| x\|^n$ este convergentă pentru $\|x\| < r$, atunci seria de polinoame este uniform convergentă împreună cu seriile de derivate Fréchet, de orice ordin. Această proprietate permite derivarea termen cu termen a acestor serii, pînă la orice ordin.

D e f i n i ţ i e. O funcţie $f : E \to F$ se numeşte analitică într-o vecinătate U a punctului $x_0 \in E$, dacă $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x - x_0), \forall x \in U$, φ_n fiind polinom omogen de grad n, determinat de forma n-liniară simetrică, continuă, $\varphi_n : E^n \to F$.

Observaţie. O condiţie suficientă ca f să fie analitică în vecinătatea U a punctului x_0, este ca f să admită derivate Fréchet de orice ordin $f^n(x)$, $\forall x \in U$ şi $\|f^n(x)\| \leqslant M$, $\forall x \in U$.

Această afirmaţie rezultă, dacă scriem formula lui Taylor pentru f în punctul x_0 [1].

3. T e o r e m ă. *Considerăm ecuaţia*

$$\frac{dy}{dx} = A(x,y), \tag{1}$$

în care

a) $$A : V(0) \times U(0) \to L(E, F);$$

$V(0)$ *este o vecinătate a lui* $0 \in E$, *un spaţiu Banach oarecare, iar* $U(0)$ *o vecinătate a lui* $0 \in F$, *alt spaţiu Banach oarecare.*

b) *A este analitică în vecinătatea* $V(0) \times U(0)$, *adică se poate scrie* $\forall (x,y) \in V(0) \times U(0)$ *în forma :*

$$A(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_k^i(x, y) \right).$$

În această serie $A_k^i : E \times F \to L(E, F)$ *sînt polinoame omogene de grad* k *în* x *şi grad* i *în* y, *determinate de forma* $A_k^i(x_1, x_2, \ldots x_k, y_1, y_2, \ldots y_i)$, $k+i$*-liniară şi continuă de la* $E^k \times F^i \to L(E, F)$.

c) *Seria numerică* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \|A_k^i\| \|y\|^i \|x\|^k$ *este convergentă* $\forall (x, y) \in V(0) \times U(0)$.

În aceste ipoteze, ecuația (1) *are o soluție* $y(x)$, *unică, analitică, într-o vecinătate* $V(0) \subset F$ *și care satisface* (2) $y(0) = 0$.

D e m o n s t r a ț i e. Din cauza condiției (2), $y(x)$ trebuie să fie de forma

$$y(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

în care $\varphi_n(x)$ este polinom omogen de grad n.

Impunînd condiția ca $y(x)$ să fie soluție pentru ecuația (1) sîntem conduși la egalitatea :

$$\varphi_1(h) + 2\varphi_2(x, h) + \ldots + n\varphi_n(\underbrace{x, \ldots, x}_{(n-1)\ ori}, h) + \ldots =$$

$$= A_0^0(h) + A_0^1\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\right)(h) + \ldots + A_0^n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\right)(h) + \ldots +$$

$$+ A_1^0(x)(h) + A_1^1\left(x, \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\right) + \ldots + A_1^n\left(x, \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\right) + \ldots +$$

$$+ A_2^0(x)(h) + A_2^1\left(x, \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\right) + \ldots + A_2^n\left(x, \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\right) + \ldots$$

. . . . . .

Această egalitate poate să aibă loc dacă și numai dacă :

$$\varphi_1(x) = (A_0^0)(x),$$

$$2\varphi_2(x) = A_0^1(\varphi_1(x))(x) + A_1^0(x)(x) = [A_0^1(\varphi_1(x)) + A_1^0(x)](x),$$

$$3\varphi_3(x) = [A_0^1(\varphi_2(x)) + A_0^2(\varphi_1(x)) + A_1^1(x_1\varphi_1(x)) + A_2^0(x)](x),$$

. . . . . .

Astfel polinoamele omogene din seria necunoscută se pot determina prin recurență, cu ajutorul dezvoltării în serie pentru operatorul $A(x, y)$.

Pentru a demonstra convergența seriei formale obținute, considerăm funcția scalară :

$$f(t, u) = \|A_0^0\| + \|A_0^1\|u + \|A_0^2\|u^2 + \ldots + \|A_0^n\|u^n + \ldots +$$
$$+ t(\|A_1^0\| + \|A_1^1\|u + \ldots + \|A_1^n\|u^n + \ldots) \ldots + \ldots$$

Datorită ipotezei c), avem că $f(t, u)$ este analitică într-o vecinătate a punctului $(0,0) \in R^2$.

Fie acum ecuația :

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \tag{1'}$$

unde $f(t, u)$ este funcția definită anterior.

Această ecuație are o soluție analitică unică, satisfăcînd condiția

$$u(0) = 0,\ u(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots \tag{2'}$$

într-o vecinătate a originii $V(0)$, unde :

$$\alpha_1 = \|A_0^0\|,$$

$$2\alpha_2 = \|A_0^1\|\alpha_1 + \|A_1^0\|,$$

$$3\alpha_3 = \|A_0^1\|\alpha_2 + \|A_0^2\|\alpha_1^2 + \|A_1^1\|\alpha_1 + \|A_2^0\|.$$

De aici rezultă :

$$\|\varphi_1\| \leqslant \|A_0^0\| = \alpha_1,$$

$$\|2\varphi_2\| \leqslant \|A_0^1\|\|\varphi_1\| + \|A_1^0\| \leqslant \|A_0^1\|\alpha_1 + \|A_1^0\| = 2\alpha_2,$$

$$\|3\varphi_3\| \leqslant \|A_0^1\|\|\varphi_2\| + \|A_0^2\|\|\varphi_1\|^2 + \|A_1^1\|\|\varphi_1\| + \|A_2^0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A_0^1\|\alpha_2 + \|A_0^2\|\alpha_1^2 + \|A_1^1\|\alpha_1 + \|A_2^0\| = 3\alpha_3,$$

. . . . . .

Rezultă că seria $u(t)$ este o serie majorantă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\| t^n$, adică seria de polinoame găsită formal, este convergentă și poate fi derivată termen cu termen. Teorema este astfel complet demonstrată.

Aceste probleme au fost ridicate de prof. A. Haimovici, căruia îi mulțumesc și pe această cale.

Institutul politehnic. Iași
Catedra de matematici

Primită la 10 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Cartan H., *Calcul Différentiel. Formes Différentielles.* Hermann, Paris, 1967.
2. Haimovici A., *Ecuații diferențiale și ecuații integrale.* EDP, Buc., 1965.
3. Haimovici A., *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional.* EDP, Buc., 1966.
4. Onciulencu I., *Ecuații diferențiale analitice în spații Banach* (I). Bul. Inst. polit. Iași, XXII (XXVI), *1—2*, s. I (1976).

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ANALYTIQUES DANS DES ESPACES DE BANACH (II)

(Résumé)

Dans cette note on étudie l'équation (1) avec la condition (2) $y(x_0) = y_0$ où $A(x, y)$: $V(x_0) \times V(y_0) \to L(E, F)$; $V(x_0)$ est un voisinage de $x_0 \in F$, un espace de Banach, $V(y_0)$ est un voisinage de $y_0 \in F$, un autre espace de Banach. Supposant A analytique (dans un sens suggéré par la définition de H. Cartan d'un polynom homogène de degré n) on démontre que l'équation (1) avec la condition (2) a une seule solution analytique dans un voisinage $V'(x_0) \subset E$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

C Z. 513.8

A DIFFERENCE SCHEME FOR A SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS OF EVOLUTION IN BANACH SPACES

BY

N. GRĂDINARU

In a Banach space Y we consider the problem :

$$(1)\quad \begin{cases} u_{x_1} \in A_1 u \\ u_{x_2} \in A_2 u \end{cases} \qquad x = (x_1, x_2) \in E_2^+ = \{x \neq \theta = (0,0),\ x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0\}$$

$$(2)\qquad u(0,0) = u_0, \quad u_0 \in Y,$$

where $A(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2$ is a closed dissipative mapping, $R(I - \lambda A(x)) \supset \supset \overline{D} = \overline{D}(A(x))$ and A_1, A_2 satisfie a condition of integrability.

A function $u(x\,;u_0) : E_1^+ \cup \{\theta\} \to Y$ is called the solution of the problem (1)—(2) if it is Lipschitz continuous for $x \in E_2^+ \cup \{\theta\}$, it is strongly differentiable a.e. in E_2^+, u_{x_1}, $u_{x_2} \in Y$ and it verifies (1) — (2). If the problem (1) — (2) has a unique solution, then as in [3] we can show that the operators $T(x)u_0 = = u(x\,;u_0)$, $x \in E_2^+ \cup \{\theta\}$, $u_0 \in D$, from a semigroup on D of the type [2]. For this problem we can extend the Theorem 3.4 from [4].

Definition. We shall say that the Y-multivalued mappings $A_n(x) = x_1 A_{1,n} + + x_2 A_{2,n}$, $(n \in N)$, it is an approximation of $A(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2$ if $D \subset D(A_n(x)) \subset Y$ for each $n \in N$ and if $y \in D$ then for every $y' \in A(x)y$ there is $y'_n \in A_n(x)y$ such that $y'_n \to y'$ (in Y) for $n \to \infty$.

Example. If $A(x)$ is dissipative, $R(I - \lambda A(x)) = Y$, $\lambda > 0$ and if Y is uniformelly convex, then Yosida approximations (see e.g. [1]) $A_{i,\lambda} = \lambda^{-1}((I - \lambda A_i)^{-1} - I)$, $i = 1, 2$, satisfy the previous definition.

Theorem. *Let $A(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2$ be a closed dissipative mapping that it is approximated by $A_n(x) = x_1 A_{1,n} + x_2 A_{2,n}$, where $A_n(x)$ are dissipative. We suppose that (i) $R(I - \lambda A(x)) \supset \overline{D}$, $\lambda > 0$, (ii) $R(I - \lambda A_n(x)) \supset \overline{\text{co}}\, D(A_n(x))$, $\lambda > 0$, (iii) $A_{1,n} A_{2,n} u = A_{2,n} A_{1,n} u$, $u \in D$, $n \in N$, and (iv) $u_n(x) = T_n(x) u_0$, $u_0 \in D(A_n)$, $n \in N$, is a unique solution of the following difference scheme :*

$$(3)\quad \begin{cases} (u_n(x))_{x_1} \in A_{1,n} u_n(x), \\ (u_n(x))_{x_2} \in A_{2,n} u_n(x), \quad x \in E_2^+, \quad u_0 \in D(A_n), \quad n \in N \\ u_n(0,0) = u_0. \end{cases}$$

Then $\lim_{n\to\infty} T_n(x)u_0 = T(x)u_0$, *for each* $u_0 \in \overline{D}$, *where* $\{T(x)\,;\, x \in E_2^+ \cup \{\theta\}\}$ *is the family of contractions operators given by Theorem* 1 *from* [2] *and which in this case it is a two-parameter semigroup of nonlinear contractions. If in addition, for* $A(x)$, *the problem* (1) — (2) *has unique solution, then this solution is* $u(x\,;\, u_0) = T(x)u_0$, $u_0 \in D$.

Proof. By Theorem 1, [2], we have $T(x)y = \lim_{n\to\infty} (I - A(x)/n)^{-n} y$, $y \in \overline{D}$, uniformlly in x on compact sets of $E_2^+ \cup \{\theta\}$. Let $y \in D$. By (i), it results there is $z \in D$ such that $y = z - \lambda z'$ with $z' \in A(x)z$. Now for $z' \in A(x)z$ there is $z'_n \in A_n(x)z$ so that $\lim_{n\to\infty} z'_n = z$. For $\lambda > 0$, by noting ([1]) $J(\lambda, n, x) = (I - \lambda A_n(x))^{-1}$, $J(\lambda, x) = (I - \lambda A(x))^{-1}$, we have :

$$\| J(\lambda, n, x)\, y - J(\lambda, x)y \| = \| J(\lambda, n, x)\, y - z \| = \| J(\lambda, n, x)\, y - J(\lambda, n, x)(z - \lambda z'_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| y - z + \lambda z'_n \| = \lambda \| z'_n - z' \| \to 0, \quad n \to \infty$$

and hence are verified the hypotheses of the Theorem 2 [2]. By this theorem, it follows that family $\{T(x)\,;\, x \in E_2^+ \cup \{\theta\}\}$ (given by Th. 1 [2]) is semigroup and $\lim_{n\to\infty} T_n(x)u_0 = T(x)u_0$, $u_0 \in \overline{D}$. The last conclusion of theorem follows directly from [4, Th. 3. 1] and [5].

Received June 14, 1976

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics

REFERENCES

1. Barbu V., *Semigrupuri de contracții neliniare în spații Banach.* Ed. Acad., Buc., 1974.
2. Grădinaru N., *On some Families of Nonlinear Operators.* Bul. Inst. polit. Iași, XIX (XXIII), *3—4*, s. I, 59—63 (1973).
3. Haimovici A., *Sur une généralisation du problème de Cauchy.* Ann. Univ. Marie Sklodowska, XVII, *17*, Sec. A, 123—131 (1963).
4. Ki Sik Ha, *Convergence of Nonlinear Semigroup and Approximation Schemes to well-posed Cauchy Problem in Banach Spaces.* Memoirs of the Fac. of Sci. Kyushu Univ., Ser. A, **25**, *2*, 337—350 (1971).
5. Miyadera I., *Some Remarks on Semi-groups of Nonlinear Operators.* Tohoku Math. J., **23**, 245—258 (1971).

O SCHEMĂ CU DIFERENȚE PENTRU UN SISTEM DE ECUAȚII NELINIARE DE EVOLUȚIE ÎN SPAȚII BANACH

(Rezumat)

Folosind teoremele 1, 2 din [2] și unele rezultate date în [4], [5], se extinde teorema 3.4 din [4] la cazul unei scheme cu diferențe pentru sisteme de ecuații neliniare de evoluție în spații Banach.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮШИМСЯ АРГУМЕНТОМ

О. А. ЖАУТЫКОВ и В. Г. БРОДОВСКИЙ

В предлагаемой заметке с помощью уплотняющих операторов [1] получены достаточные условия существования решений краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [2] в банаховом пространстве.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t) + f\{t, x(t), x[h_1(t)], \ldots, x[h_k(t)], \dot{x}[g_1(t)], \ldots, \dot{x}[g_l(t)]\}, \tag{1}$$

где $x(t)$ – искомая функция со значениями в некотором банаховом пространстве B.

Норму элемента $\xi \in B$ будем обозначать символом $\|\xi\|$. Предположим, что

1) функция $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{k+l})$ со значениями из пространства B задана в области

$$0 \leqslant t \leqslant b, \quad \max_{0 \leqslant i \leqslant k+l} \{\|y_i\|\} < \infty, \tag{2}$$

непрерывна по совокупности переменных $t, y_0, y_1, \ldots, y_k$ и удовлетворяет условию Липшица относительно $y_{k+1}, \ldots, y_{k+l}$ в виде

$$\|f(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, y''_{k+1}, \ldots, y''_{k+l}) - f(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, y'_{k+1}, \ldots, y'_{k+l})\| \leqslant K \max_{k+1 \leqslant i \leqslant k+l} \{\|y''_i - y'_i\|\}, \tag{3}$$

где $b > 0, K \geqslant 0$ – постоянные числа ;

2) найдутся такие неотрицательные числа α и R, что в области (2) будет выполняться неравенство

$$\|f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{k+l})\| \leqslant R + \alpha \max_{0 \leqslant i \leqslant k+l} \{\|y_i\|\} ; \tag{4}$$

3) $P(t)$ (при каждом фиксировании t) – линейный оператор, действующий и ограниченный в пространстве B, непрерывно зависящий от t, $t \in [0,b]$;

4) $h_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ – заданные на сегменте $[0, b]$ непрерывные скалярные функции.

Положим

$$h_0 = \min \{ \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \min_{0 \leqslant t \leqslant b} h_j(t), \min_{1 \leqslant i \leqslant l} \min_{0 \leqslant t \leqslant b} g_i(t) \},$$

$$h_b = \max \{ \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \max_{0 \leqslant t \leqslant b} h_j(t), \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \max_{0 \leqslant t \leqslant b} g_i(t) \}$$

и введем следующие множества

$$E_0 = \{t : t \in (0,b),\ g_i(t) = 0,\ g_i(t) = b,\ i = 1, 2, \ldots, l\},$$

$$E_j = \{t : t \in (0, b),\ g_i(t) = \tau,\ \tau \in E_{j-1},\ i = 1, 2, \ldots, l,\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Допустим теперь еще, что

5) при $t \in [h_0, 0]$ (если $h_0 < 0$) и при $t \in [b, h_b]$ (если $h_b > b$) соответственно определены непрерывно дифференцируемые по t операторы $\varphi(t)$, $\psi(t)$ (для каждого фиксированного t) – линейные, ограниченные, действующие в пространстве B и такие, что $\varphi(0) = \psi(0) = I$ — тождественный оператор ;

6) множество $E = \bigcup_{j=0}^{m} E_j$ конечно.

Ищутся достаточные условия существования решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего граничным условиям

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i x(\tau_i) = L, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_N = b, \tag{5}$$

$L \in B$, α_i — органиченные линейные операторы, действующие в B

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t)x(0), & \text{если} \quad t \in [h_0, 0], \\ \psi(t)x(b), & \text{если} \quad t \in [b, h_b]. \end{cases} \tag{6}$$

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $x(t)$ со значениями из пространства B, определенную и непрерывную на отрезке $[0, b]$, которая обращает (1) в тождество всюду на интервале $(0, b)$ за исключением точек множества E . При этом , эсли в правой части уравнения (1) аргументы искомой функции выходят за пределы отрезка $[0, b]$, то следует учесть условие (6).

Пусть $\tilde{M}[0, b]$—множество функций $v(t)$ со значениями из пространства B, определенных на сегменте $[0, b]$ и имеющих двусторонние разрывы первого ряда в точках множества E и разрывы первого рода соответственно справа и слева в точках $t = 0$, $t = b$. Если норму элемента $v(t) \in \tilde{M}[0, b]$ определим с помощью равенства $\|v(t)\|_{\tilde{M}} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant b} \|v(t)\|$, то $\tilde{M}[0,b]$ обращается в полное линейное нормированное пространство.

Далее воспользуемся так называемой „W-подстановкой“ [3]—[5], для чего рассмотрим сначала вопрос о существовании решения $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t) + v(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant b, \tag{7}$$

удовлетворяющего условию (5). Решением уравнения (7) будем называть непрерывную на отрезке $[0, b]$ функцию $x(t)$ со значениями из пространства B, которая обращает это уравнение в тождество всюду на интервале $(0, b)$ за исключением точек множества E.

Пусть $\Phi(t)$ $(\Phi(0)=I)$ – разрешающий оператор уравнения $\dot{x}(t)=P(t)x(t)$. Предположим, что оператор $G=\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \Phi(\tau_i)$ имеет ограниченный обратный G^{-1}. Тогда решение $x(t)$ задачи (7), (5) можно записать [3] — [6] в виде

$$x(t) = A(t)v \equiv \Phi(t)G^{-1}L + \int_0^b H(t, s)v(s)\mathrm{d}s, \tag{8}$$

где $M(t, s)$ (при фиксированных t, s) – линейный оператор, действующий в пространстве B и для $\tau_{k-1} \leqslant s < \tau_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ определенный [3] — [6] следующим образом

$$H(t, s) = \begin{cases} \Phi(t)[I - G^{-1} \sum_{i=k}^{N} \alpha_i \Phi(\tau_i)]\Phi^{-1}(s), & s < t, \\ -\Phi(t)G^{-1} \sum_{i=k}^{N} \alpha_i \Phi(\tau_i)\Phi^{-1}(s), & s \geqslant t. \end{cases}$$

Согласно равенствам (6) – (8) положим тепер

$$x(t) = C(t)v = \begin{cases} \varphi(t)A(0)v, & h_0 \leqslant t < 0, \\ A(t)v, & 0 \leqslant t \leqslant b, \\ \psi(t)A(b)v, & b < t \leqslant h_b, \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = D(t)v + \bar{v}(t) = \begin{cases} \dot{\varphi}(t)A(0)v, & h_0 \leqslant t < 0, \\ P(t)A(t)v + v(t), & 0 \leqslant t \leqslant b, \\ \dot{\psi}(t)A(b)v, & b < t \leqslant h_b. \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем для любой функции $\eta(t) \in \tilde{M}[0, b]$ будем полагать $\bar{\eta}(t) \equiv 0$, если $t \in [h_b, 0)$ или $t \in (b, h_b]$ и $\bar{\eta}(t) \equiv \eta(t)$ при $t \in [0, b]$. Вспомогательная задача (7), (5) и введенныеобозначения позволяют вместо задачи (1), (5), (6) рассмотреть на отрезке $[0, b]$ уравнение

$$\begin{aligned} v(t) = f\{t, A(t)v, \quad & C[h_1(t)]v, \ldots, C[h_k(t)]v, \\ & D[g_1(t)]v + \bar{v}[g_1(t)], \ldots, D[g_l(t)]v + \bar{v}]g_l(t)]\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Под его решением мы будем понимать функцию $v(t) \in \tilde{M}[0, b]$, которая удовлетворяет этому уравнению всюду на интервале $(0, b)$ за исключением точек множества E. При этом в правой части (9) следует полагать $\bar{v}(t) \equiv 0$ для всех $t \in [h_0, 0)$, $t \in (b, h_b]$.

Правая часть уравнения (9) определяет нелинейный оператор $F(t, v) : [0, b] \times \tilde{M} \Leftrightarrow \tilde{M}$, тогда это уравнение можно записать в виде

$$v(t) = F(t, v). \tag{10}$$

Предположим, что

7) для любой функции $\mu(t) \in \widetilde{M}$ оператор

$$F_\mu(t, v) \equiv f\{t, A(t)v, C[h_1(t)]v, \ldots, C[h_k(t)]v, D[g_1(t)]v + \bar{\mu}[g_1(t)], \ldots, D[g_l(t)]v + \bar{\mu}[g_l(t)]\} : [0,b] \times \widetilde{M} \Leftrightarrow \widetilde{M} \tag{11}$$

вполне непрерывен.

Пусть $\lambda \geqslant 0$, $P > 0$, $h > 0$, $q > 0$, $\varkappa \geqslant 1$ — такие постоянные числа, что $\|L\| \leqslant \lambda$, $\|P(t)\| \leqslant P$, $\|H(t,s)\| \leqslant h$, $\|\Phi(t)G^{-1}\| \leqslant q$ для всех $t \in [0,b]$ и $\max\{\|\varphi(t)\|, \|\dot{\varphi}(t)\|\} \leqslant \varkappa$, $\max\{\|\psi(t)\|, \|\dot{\psi}(t)\|\} \leqslant \varkappa$ соответственно при $t \in [h_0, 0]$ и $t \in [b, h_b]$. Здесь и в дальнейшем нормы линейных операторов понимаются в общепринятом смысле. Положим $\max\{\varkappa bh, pbh + 1\} = d$ и $q\lambda \max\{P, \varkappa\} = \theta$. Тогда имеет место

Т е о р е м а . *Если выполнены условия* 1) — 7), *оператор* G *имеет ограниченный обратный* G^{-1} *и* $\max\{K, \alpha d\} < 1$, *то существует хотя бы одно решение задачи* (1), (5), (6), *определенное и непрерывное на отрезке* $[0, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через T совокупность функций $v(t) \in \widetilde{M}[0, b] : \|v(t)\|_{\tilde{M}} \leqslant Q$, где $Q \geqslant (R + \alpha\theta)/(1 - \alpha d)$ некоторое постоянное число. Нетрудно видеть, что оператор F непрерывен по v и в силу неравенства (4) $F(t, T) \subseteq T$. Покажем, что он является уплотняющим на T. Пусть для некоторого постоянного числа $\varepsilon > 0$ $\{\mu_i(t) \in \widetilde{M}[0, b]$, $i = 1, 2, \ldots, \tau\}$ представляет собой ε-сеть некоторого некомпактного множества $\Omega \subseteq T$. С помощью введенного в (11) оператора F_μ построим множества $S_i = F_{\mu_i}(t, \Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$. В силу полной непрерывности операторов F_{μ_i} множества S_i, а, следовательно, и их обьединение $S = \bigcup_{i=0}^{\tau} S_i$ компактны. Покажем, что S представляет собою $K\varepsilon$-сеть множества $F(t, \Omega)$. Пусть $u(t) \in F(t, \Omega)$: $u(t) = f\{t, A(t)v, C[h_1(t)]v, \ldots, C[h_k(t)]v, D[g_1(t)]v + \bar{v}[g_1(t)], \ldots, D[g_l(t)]v + \bar{v}[g_l(t)]\}$ и $z(t) \in S$, то есть найдется такое натуральное число $i_0 : 1 \leqslant i_0 \leqslant \tau$, что $z(t) \in S_{i_0}$ и тем самым $z(t) = f\{t, A(t)v, C[h_1(t)]v, \ldots, C[h_k(t)]v, D[g_1(t)]v + \mu_{i_0}[g_1(t)], \ldots, D[g_l(t)]v + \bar{\mu}_{i_0}[g_l(t)]\}$. Тогда из условия (3) имеем $\|u(t) - z(t)\|_{\tilde{M}} \leqslant K\|v(t) - \mu_{i_0}(t)\|_{\tilde{M}} \leqslant K\varepsilon$.

Таким образом, каждой ε-сети множества Ω соответствует компактная $K\varepsilon$-сеть множества $F(t, \Omega)$. Если через $\chi(\Omega)$ обозначить меру некомпактности множества Ω, то при $K < 1$ получим $\chi[F(t, \Omega)] < \chi(\Omega)$. Это значит, что F удовлетворяет теореме о неподвижной точке для уплотняющих операторов [1]. Следовательно, уравнение (10), а тем самым и задача (1), (5), (6) имеют хотя бы одно решение.

Примечание. Настоящая работа включается в рамки исследований посвященных дифференциальным системам сложной структуры [7].

Поступила 1 V 1976 г.

АН Казах. ССР, Алма-Ата, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский Б. Н., *Об одном принципе неподвижной точки.* Функциональный анализ и его приложения, **I**, *2*, 74—76 (1967).
2. Каменский Г. А., Мышкис Д. А., *Краевые задачи для нелинейного дифференчиального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.* Дифференц. уравнения, **8**, *12*, 2171—2179 (1972).
3. Азбелев Н. В., *О линейных краевых задачах для функционально-дуфференциальных уравнений.* Дифференц. уравнения, **10**, *4*, 579 — 584 (1974).
4. Рахматуллина Л. Ф., *О канонических формах линейных функционально-дифференциальных уравнений.* Дифференц. уравнения, **11**, *12*, 2141—2153 (1975).
5. Азбелев Н. В., Исламов Г, Г., *Об одном классе функчионально-дифференциальных уравнений.* Дифференц. уравнения, **12**, *3*, 412—427 (1976).
7. Манжерон Д., Огюзторели М. Н., *Математические системы сложных структур. Решения некоторых линейных и нелинейных функционально-интегральных и интегро-дифференциалло-функциональных уравнений.* ДАН СССР, **196**, 293—295 и 523—526 (1971).
6. Urabe M., *Existence Theorem for Multi-point Boundary Value Problems.* Funkcial Ekvac., **9**, *1—2*, 43—60 (1966).

REZOLUBILITATEA PROBLEMELOR DE CONTUR MULTIPUNCTUALE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

(Rezumat)

Cu ajutorul operatorilor de condensare [1] se obţin condiţii suficiente de existenţă a soluţiilor în spaţiul Banach a ecuaţiilor diferenţiale cu argument întîrziat (1) [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.Z. 528.2

METODĂ DE CALCUL AL DEPLASĂRILOR VERTICALE ALE CONSTRUCŢIILOR ŞI EVALUAREA PRECIZIEI

DE

GH. NISTOR

1. Măsurarea deplasărilor verticale ale punctelor îndepărtate şi greu accesibile ale construcţiilor înalte se face prin nivelment trigonometric. Deoarece, în cazul nivelmentului trigonometric cu vize scurte, precizia de determinare a cotelor este comparabilă cu precizia nivelmentului geometric, această metodă poate fi folosită şi în cazul unor condiţii obişnuite, în special cînd măsurarea deplasărilor orizontale şi verticale ale unei construcţii se face concomitent.

Mărimile deplasărilor verticale (tasări sau ridicări) se pot obţine fie prin diferenţa cotelor punctelor de control, de pe construcţia observată, determinate în ciclul iniţial şi în ciclul actual, fie pe baza creşterilor unghiurilor verticale sau ale distanţelor zenitale între cele două cicluri de observaţii.

Calculul mărimilor deplasărilor verticale prin diferenţa cotelor fiind destul de anevoios, s-a urmărit determinarea acestora pe baza creşterilor unghiurilor verticale din fiecare ciclu de observaţii.

2. Faţă de punctele de capăt, A şi B, ale unei baze fixe, concomitent cu măsurarea elementelor necesare determinării deplasărilor orizontale (b, α, β) se face şi măsurarea elementelor necesare determinării deplasărilor verticale (φ_1, φ_2) ale punctului de control, P (fig. 1).

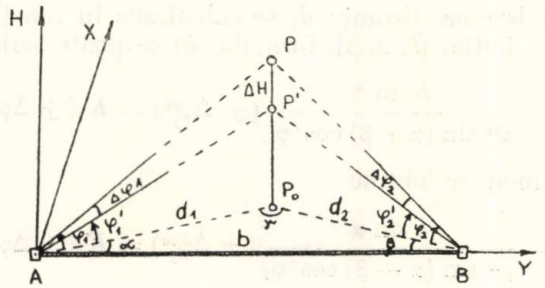

Fig. 1

Cota punctului de control, P, în ciclul iniţial, determinată din staţia A, este dată de relaţia

$$H_1 = H_A + h_1, \tag{1}$$

unde : H_A — orizontul instrumentului în punctul de stație A, h_1 — diferența de nivel dintre orizontul instrumentului din stația A și punctul de control, P.

În intervalul de timp dintre ciclul inițial și ciclul actual de observație, punctul de control s-a deplasat pe verticală, odată cu construcția, din poziția P în poziția P' ; cota punctului P', corespunzătoare ciclului actual, determinată din stația A, este

$$H'_1 = H'_A + h'_1. \tag{2}$$

Deplasarea pe verticală a punctului de control, între cele două cicluri de observații, determinată din stația A, este

$$\Delta H_1 = (H'_A - H_A) + (h'_1 - h_1) = \Delta H_A - \Delta h_1. \tag{3}$$

În mod asemănător, deplasarea verticală a punctului de control, determinată din stația B, va fi dată de relația

$$\Delta H_2 = (H'_B - H_B) + (h'_2 - h_2) = \Delta H_B - \Delta h_2. \tag{4}$$

Valoarea lui h_1, din relația (1), este dată de formula

$$h_1 = d_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \tag{5}$$

ar valoarea lui h'_1, din relația (2), este dată de formula

$$h'_1 = d_1 \operatorname{tg} \varphi'_1. \tag{6}$$

Scăzîndu-se din (6) pe (5) se obține

$$\Delta h_1 = h'_1 - h_1 = d_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - d_1 \operatorname{tg} \varphi'_1. \tag{7}$$

Dacă se face înlocuirea $\varphi'_1 = \varphi_1 \pm \Delta\varphi_1$, prin liniarizare, formula (7) capătă forma

$$\Delta h_1 = \frac{d_1}{\rho^{cc} \cos^2 \varphi_1} (\pm \Delta\varphi_1). \tag{8}$$

Avînd în vedere că distanța d_1 se calculează în funcție de elementele măsurate în ciclul inițial (b, α, β), formula (8) se poate scrie

$$\Delta h_1 = \frac{b \sin \beta}{\rho^{cc} \sin(\alpha + \beta) \cos^2 \varphi_1} (\pm \Delta\varphi_1^{cc}) = K_1 (\pm \Delta\varphi_1^{cc}). \tag{9}$$

În același mod se obține

$$\Delta h_2 = \frac{b \sin \alpha}{\rho^{cc} \sin(\alpha + \beta) \cos^2 \varphi_2} (\pm \Delta\varphi_1^{cc}) = K_2 (\pm \Delta\varphi_1^{cc}). \tag{10}$$

Cînd $\Delta H_A = \Delta H_B = 0$ rezultă că mărimile deplasărilor verticale ale punctului de control, de pe construcția observată, vor fi

$$\Delta H_1 = \Delta h_1, \qquad \Delta H_2 = \Delta h_2. \tag{11}$$

Ca valoare definitivă a deplasării punctului de control se ia media aritmetică

$$\Delta H_I = \frac{\Delta H_1 + \Delta H_2}{2}, \tag{12}$$

sau media ponderată a celor două valori

$$\Delta H_{II} = \frac{p_1 \Delta H_1 + p_2 \Delta H_2}{p_1 + p_2}, \tag{13}$$

unde ponderile sînt date de relațiile

$$p_1 = \frac{1}{m^2_{\Delta H_1}}, \quad p_2 = \frac{1}{m^2_{\Delta H_2}}. \tag{14}$$

3. În relațiile (3) și (4), considerîndu-se că diferențele H_A și H_B sînt fără eroare, mărimile deplasărilor verticale ale punctului de control sînt funcții de elementele măsurate direct : b, α, β, φ_1, φ_2, $\Delta\varphi_1$ și $\Delta\varphi_2$.

Erorile medii pătratice ale deplasărilor verticale se calculează aplicînd formula erorii medii pătratice a unei funcții de mărimi măsurate direct. Astfel s-au obținut

$$m^2_{\Delta H_1} = \Delta H_1^2 \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \Delta H_1^2 \operatorname{ctg}^2(\alpha+\beta)\left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + \Delta H_1^2 [\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)]^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + \tag{15}$$
$$+ 4\Delta H_1^2 \operatorname{tg}^2\varphi_1 \left(\frac{m_{\varphi_1}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_1}{\Delta\varphi_1}\right)^2 \left(\frac{m_{\Delta\varphi_1}}{\varphi}\right)^2,$$

$$m^2_{\Delta H_2} = \Delta H_2^2 \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \Delta H_2^2 [\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)]^2 \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + \Delta H_2^2 \operatorname{ctg}^2(\alpha+\beta)\left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + \tag{16}$$
$$+ 4\Delta H_2^2 \operatorname{tg}^2\varphi_2 \left(\frac{m_{\varphi_2}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_2}{\Delta\varphi_2}\right)^2 \left(\frac{m_{\Delta\varphi_2}}{\rho}\right)^2.$$

Eroarea medie pătratică a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control, dată de relația (12), va fi

$$m^2_{\Delta H_I} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H_1}{b} + \frac{\Delta H_2}{b}\right)\right]^2 m_b^2 + \left\{\frac{\Delta H_1 \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) + \Delta H_2 [\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)]}{2}\right\}^2 \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + \tag{17}$$
$$+ \left\{\frac{\Delta H_1 [\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)] + \Delta H_2 \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)}{2}\right\}^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + (\Delta H_1 \operatorname{tg}\varphi_1)^2 \left(\frac{m_{\varphi_1}}{\rho}\right)^2 +$$
$$+ (\Delta H_2 \operatorname{tg}\varphi_2)^2 \left(\frac{m_{\varphi_2}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_1}{2\Delta\varphi_1}\right)^2 \left(\frac{m_{\Delta\varphi_1}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_2}{2\Delta\varphi_2}\right)^2 \left(\frac{m_{\Delta\varphi_2}}{\rho}\right)^2.$$

Admițîndu-se că $\Delta H_1 \cong \Delta H_2 = \Delta H$ rezultă pentru eroarea medie pătratică a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control formula

$$m^2_{\Delta H_I} = \Delta H^2 \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left[\frac{\Delta H}{2}(\operatorname{ctg}\alpha + 2\operatorname{ctg}\gamma)\right]^2 \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + \left[\frac{\Delta H}{2}(\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}\gamma)\right]^2 \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + \tag{18}$$
$$+ (\Delta H \operatorname{tg}\varphi_1)^2 \left(\frac{m_{\varphi_1}}{\rho}\right)^2 (\Delta H \operatorname{tg}\varphi_2)^2 \left(\frac{m_{\varphi_2}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{2\Delta\varphi_1}\right)^2 \left(\frac{m_{\Delta\varphi_1}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{2\Delta\varphi_2}\right)^2 \left(\frac{m_{\Delta\varphi_2}}{\rho}\right)^2.$$

Pentru cazul cînd $\alpha = \beta$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ iar unghiurile au fost măsurate cu aceeași precizie în ambele cicluri de observații

(19) $$m_\alpha = m_\beta, \quad m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = m_\varphi, \quad m_{\Delta\varphi_1} = m_{\Delta\varphi_2} = m_{\Delta\varphi},$$

formula (18) capătă forma

(20) $$m_{\Delta H_I} = \pm\left[\left(\Delta H \frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,\Delta H \operatorname{tg}\varphi \frac{m_\varphi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{\sqrt{2}\,\Delta\varphi} \frac{m_{\Delta\varphi}}{\rho}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Minimul erorii medii pătratice a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control se obține pentru cazul cînd $\gamma = 200^g$ și $\varphi = 0^g$; aceasta corespunde cazului optim de determinare a deplasării verticale a punctului de control prin metoda nivelmentului trigonometric. Rezultă că o precizie ridicată la determinarea deplasării verticale se obține în cazul cînd dreptele de determinare sînt aproximativ orizontale și se intersectează sub unghiuri apropiate de 200^g.

În continuare se exprimă eroarea medie pătratică a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control în funcție de erorile medii pătratice ale diferențelor dintre orizonturile instrumentului din punctele de stație, $m_{\Delta H_A}$ și $m_{\Delta H_B}$.

Diferențele dintre orizonturile instrumentului fiind

(21) $$\Delta H_A = H'_A - H_A, \qquad \Delta H_B = H'_B - H_B,$$

erorile medii pătratice corespunzătoare vor fi date de relațiile

(22) $$m_{\Delta H_A} = \pm\sqrt{m^2_{H'_A} + m^2_{H_A}}, \qquad m_{\Delta H_B} = \pm\sqrt{m^2_{H'_B} + m^2_{H_B}}$$

iar pentru cazul cînd $m_{H_A} = m_{H'_A}$ și $m_{H_B} = m_{H'_B}$, formele (22) devin

(23) $$m_{\Delta H_A} = \pm m_{H_A}\sqrt{2}, \qquad m_{\Delta H_B} = \pm m_{H_B}\sqrt{2}.$$

Eroarea medie pătratică a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control, dată de relația (12), va fi

(24) $$m_{\Delta H_I} = \frac{\sqrt{m^2_{\Delta H_A} + m^2_{\Delta H_B}}}{2},$$

iar pentru cazul cînd $m_{\Delta H_A} = m_{\Delta H_B}$, va rezulta

(25) $$m_{\Delta H_I} = \pm\frac{m_{\Delta H_A}\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{m_{\Delta H_A}}{\sqrt{2}} = 0{,}71\, m_{\Delta H_A}.$$

Din analiza formulei (25) se desprinde concluzia că eroarea medie pătratică a valorii medii a deplasării verticale reprezintă 0,71 din eroarea medie pătratică a diferenței dintre orizonturile instrumentului dintr-un punct de stație.

Cînd pentru valoarea definitivă a deplasării verticale a punctului de control se ia media ponderată, dată de relația (13), evaluarea preciziei se face calculîndu-se eroarea unității de pondere

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \tag{26}$$

și eroarea medie pătratică a mediei ponderate

$$M = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{27}$$

4. Concluzii

a. Metoda de calcul a deplasării verticale a punctului de control, în funcție de creșterile unghiurilor verticale, prezentată în lucrare, permite un calcul simplu, rapid și sigur ; mărimile K_1 și K_2, calculate cu elementele măsurate în ciclul inițial, rămîn constante pentru toate ciclurile de observații ulterioare.

b. Formula (18) dă posibilitatea calculării erorii medii pătratice a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control în funcție de toate elementele măsurate pe teren, din două puncte de capăt ale bazei de lungime fixă.

c. Analiza formulei (20) a condus la stabilirea cazului optim de determinare a valorii medii a deplasării verticale a punctului de control, de pe construcția observată, care se obține cînd $\varphi = 0^g$ și $\gamma = 200^g$.

d. Eroarea medie pătratică a valorii medii a deplasării punctului de control, conform relației (25), reprezintă 0,71 din eroarea medie pătratică a diferenței dintre orizonturile instrumentului dintr-un singur punct de stație.

Primită la 31 iulie 1976

Institutul politehnic, Iași,
Laboratorul de topografie și fotogrammetrie

MÉTHODE DE CALCUL POUR LES DÉPLACEMENTS VERTICALES DES CONSTRUCTIONS ET DÉTERMINATION DE LA PRÉCISION

(Résumé)

On présente une méthode de calcul des déplacements verticales des constructions par nivellement trigonométrique, fonction de la croissance des angles verticales. On analyse aussi la précision des résultats.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D.C. 539.31

A METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATION IN NONLINEAR THEORY OF SIMPLE DIPOLAR ELASTIC SOLID (I)

BY

SILVIA G. NEAGU

0. Introduction

The purpose of the present paper is the development of a method of successive approximation in nonlinear theory of simple dipolar elastic solids. As in [1], [2] we discuss the question of the uniqueness of the assumed type of solution in series form, supposing that such a solution exists. The calculation of m terms in the expansion of the solution is reduced formally, to the solution of m boundary-value problems of traction in the linear case of Mindlin's elasticity with microstructure.

First the constitutive equations in a more useful form for simple dipolar elastic solids are derived.

In the second part of the paper we shall present an interpretation of the expansion following Rivlin and Topakoglu [3], [8].

1. Constitutive Equations of Anisotropic, Simple Dipolar Elastic Solids

We refer the motion of the continuum to a fixed system of rectangular cartesian axes. The position of a typical particle of the continuum at time t is denoted by x_k, where

$$x_k = x_k(X_L, t), \qquad (k = 1, 2, 3\,;\ L = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

and X_L is a reference position of the particle at time t_0.

Following [4] we define a dipolar displacement field x_{iA} as a tensor function of X_L and t. Being imposed the restriction that $\det [x_{iA}] \neq 0$, we define an inverse tensor $\bar{x}_j^A$ which is such that $\bar{x}_{iA}\bar{x}_j^A = \delta_{ij}$.

În [4] are established the following basic equations of equilibrium.

$$\sigma_{ji} + \rho f_i = 0, \qquad \bar{\sigma}_{ij} = \rho F_{ij} + \mu_{kij,k}, \qquad \sigma_{ki} - \bar{\sigma}_{ki} = s_{ik} = s_{ki} \tag{1.2}$$

and the boundary conditions

$$t_i = n_k\sigma_{ki}, \qquad t_{ij} = n_k\mu_{kij}. \tag{1.3}$$

Here f_i and F_{ij} are body and dipolar body forces per unit mass, ρ is density, t_i and t_{ij} are surface and dipolar surface forces per unit area of the deformed body, σ_{ij} and μ_{kij} are stress tensor and stress dipolar measures per unit area of the deformed body associated with the x_k - surfaces.

The local equation of energy can be written in the form

$$\dot{W} = s_{ki}v_{i,k} + \bar{\sigma}_{ij}(v_{j,i} + v_{ij}) + \mu_{kij}v_{ij,k}, \tag{1.4}$$

where W is the density of the internal energy.

The dipolar elastic solid is defined by the constitutive equations

$$\begin{aligned} &W = W(E_{KL}, \in_{KL}, D_{KLM}), \quad s_{ki} = s_{ki}(E_{KL}, \in_{KL}, D_{KLM}), \\ &\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(E_{KL}, \in_{KL}, D_{KLM}), \quad \mu_{kij} = \mu_{kij}(E_{KL}, \in_{KL}, D_{KLM}), \end{aligned} \tag{1.5}$$

where

$$\begin{aligned} &2E_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}, \quad \in_{KL} = U_{L,K} + \Phi_{KL} + U_{P,K}\Phi_{PL}, \\ &D_{KLM} = \Phi_{KL,M} - \varphi_{KR}\,\Phi_{RL,M} = \bar{x}^K_p x_{pL,M}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Here U_K is the deformation vector, φ_{KL} and Φ_{KL} are the tensors of the micro-deformation, defined as in [7].

From (1.4) and (1.5) it follows

$$\begin{aligned} &s_{ji} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial E_{KL}}\, x_{j,K}x_{i,L}, \quad \bar{\sigma}_{ji} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial \in_{KL}}\, x_{iL}x_{j,K}, \\ &\mu_{kij} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial D_{KLM}}\, \bar{x}^K_i x_{jL}x_{k,M}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

We write the equations of motion and boundary conditions (1.2), (1.3) in an alternative from, extending the classical definition of Piolla-Kirchhoff's stress tensor to the present case and set

$$T_{KL} = \frac{\partial W}{\partial E_{KL}}, \quad T_{Ki} = T_{KL}\, x_{i,L}, \quad s_{ji} = \frac{1}{J}\, T_{Ki}x_{j,K}. \tag{1.8}$$

Besides Piolla-Kirchhoff stress tensor let us set tensors, defined by

$$\bar{\sigma}_{Kj} = \frac{\partial W}{\partial E_{KL}}\, x_{jL}, \quad \mu_{Mij} = \frac{\partial W}{\partial D_{KLM}}\, \bar{x}^K_i x_{jL}. \tag{1.9}$$

Let us set also the forces per unit deformed area defined by

$$T_i = t_i\frac{da}{dA}, \quad T_{ij} = t_{ij}\frac{da}{dA}. \tag{1.10}$$

În terms of the above quantities, the equations of motion and boundary conditions (1.2) and (1.3) may be expressed as it follows

$$T_{Ki,K} + \bar{\sigma}_{Ki,K} + \rho_0 f_i = 0, \quad \bar{\sigma}_{Kj}x_{i,K} = \rho_0 F_{ij} + \mu_{Mij,M}, \tag{1.11}$$

(1.12) $$T_i = \sigma_{Li} N_L, \qquad T_{ij} = \mu_{Lij} N_L,$$

where N_L is the unit outward normal to the undeformed configuration of the body, and ρ_0 is density of the material in its undeformed state.

2. A Method of Successive Approximation

It is assumed that the prescribed surface tractions T_i and dipolar surface tractions T_{ij}, per unit area of the undeformed body and body forces f_i and dipolar body forces F_{ij} depend analitically on the parameter ε and these vanish when $\varepsilon = 0$. We then have series expansions

(2.1) $$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n T_i^{(n)}, \qquad f_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_i^{(n)},$$
$$T_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n T_{ij}^{(n)}, \qquad F_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F_{ij}^{(n)}.$$

We shall assume that there exists a solution U_K and Φ_{KL} to the boundary value problem (1.11), (1.12), defined by the loads (2.1), which together with their first and second partial derivatives can be expanded as absolutely convergent power series in ε

(2.2) $$U_K = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_K^{(n)}, \qquad \Phi_{KL} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_{KL}^{(n)}.$$

We suppose that the density of the internal energy W is a polynomial in E_{KL}, $\in_{KL}$, D_{KLM} with coefficients which are absolute constants so that the body is initially homogeneous.

We assume that the reference configuration is a natural state. Using (3.1), (3.2) of [7, II], from (1.8), (1.9) we see that components T_{Ki}, $\bar{\sigma}_{Kj}$, μ_{Mij} become

(2.3) $$T_{Ki} = \frac{\partial W}{\partial E_{KL}} (\delta_{iL} + U_{i,L}), \qquad \bar{\sigma}_{Kj} = \frac{\partial W}{\partial \in_{KL}} (\delta_{iL} + \Phi_{iL}),$$
$$\mu_{Mij} = \frac{\partial W}{\partial D_{KLM}} (\delta_{iK} - \varphi_{iK})(\delta_{jL} + \Phi_{jL}).$$

The components can be written in the form

(2.4) $$T_{Ki} = A_{KiRS} E_{RS} + B_{RSKi} \in_{RS} + C_{RSMKi} D_{RSM} + H_{Ki},$$
$$\bar{\sigma}_{Ki} = B_{KiRS} E_{RS} + F_{RSKi} \in_{RS} + G_{KiRSM} D_{RSM} + S_{Ki},$$
$$\mu_{Mij} = C_{MijRS} E_{RS} + L_{RSMij} \in_{RS} + P_{MijRST} D_{RST} + R_{Mij},$$

where H_{Ki}, S_{Ki}, R_{Mij}, are polynomials in $E_{RS}, \in_{RS}, D_{RSM}$ containing no constant or linear terms. Then by using (2.2), (2.4) we obtain

$$(2.5)\qquad T_{Ki}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n T_{Ki}^{(n)},\qquad \bar{\sigma}_{Ki}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\bar{\sigma}_{Ki}^{(n)},\qquad \mu_{Mij}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mu_{Mij}^{(n)},$$

where

$$(2.6)\quad \begin{aligned}
T_{Ki}^{(1)}&=\frac{1}{2}A_{KiRS}(U_{R,S}^{(1)}+U_{S,R}^{(1)})+B_{RSKi}(U_{S,R}^{(1)}+\Phi_{R,S}^{(1)})+C_{RSMKi}\Phi_{RS,M}^{(1)},\\
T_{Ki}^{(n)}&=\frac{1}{2}A_{KiRS}(U_{R,S}^{(n)}+U_{S,R}^{(n)})+B_{RSKi}(U_{S,R}^{(n)}+\Phi_{RS}^{(n)})+C_{RSMKi}\Phi_{RS,M}^{(n)}+N_{Ki}^{(n)},\\
\bar{\sigma}_{Ki}^{(1)}&=\frac{1}{2}B_{KiRS}(U_{R,S}^{(1)}+U_{S,R}^{(1)})+F_{RSKi}(U_{S,R}^{(1)}+\Phi_{RS}^{(1)})+G_{KiRSM}\Phi_{RS,M}^{(1)},\\
\bar{\sigma}_{Ki}^{(1)}&=\frac{1}{2}B_{KiRS}(U_{R,S}^{(n)}+U_{S,R}^{(n)})+F_{RSKi}(U_{S,R}^{(n)}+\Phi_{RS}^{(n)})+G_{KiRSM}\Phi_{RS,M}^{(n)}+S_{Ki}^{(n)},\\
\mu_{Mij}^{(1)}&=\frac{1}{2}C_{MijRS}(U_{R,S}^{(1)}+U_{S,R}^{(1)})+L_{RSMij}(U_{S,R}^{(1)}+\Phi_{RS}^{(1)})+P_{MijRST}\Phi_{RS,M}^{(1)},\\
\mu_{Mij}^{(n)}&=\frac{1}{2}C_{MijRS}(U_{R,S}^{(n)}+U_{S,R}^{(n)})+L_{RSMij}(U_{S,R}^{(n)}+\Phi_{RS}^{(n)})+P_{MijRST}\Phi_{RS,M}^{(n)}+R_{Mij}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Substituting the relations (2.1), (2.5) in the equations (1.11), (1.12) and equating coefficients of ε to zero, we have

$$(2.7)\quad \begin{aligned}
&T_{Ki,K}^{(n)}+\bar{\sigma}_{Kj,K}^{(n)}+\rho_0 f_i^{(n)}=0,\qquad \bar{\sigma}_{ij}^{(1)}=\rho_0 F_{ij}^{(1)}+\mu_{Mij,M}^{(1)},\\
&\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}=\rho_0 F_{ij}^{(n)}+\mu_{Mij,M}^{(n)}-\bar{\sigma}_{Ki}^{(n-1)}U_{j,K}^{(n-1)},\qquad \text{for } n=2,3,\ldots\\
&\sigma_{Li}^{(n)}N_L=T_i^{(n)},\qquad \mu_{Lij}^{(n)}N_L=T_{ij}^{(n)}.
\end{aligned}$$

When (2.6) is used, these systems take the form

$$(2.8)\quad \begin{aligned}
&T_{ji,j}^{(n)}+\bar{\sigma}_{ji,j}^{(n)}+\rho_0\overset{*}{f}{}_i^{(n)}=0,\qquad \bar{\sigma}_{ij}^{(n)}=\rho_0\overset{*}{F}{}_{ij}^{(n)}+\mu_{kij,k}^{(n)},\\
&\sigma_{ji}^{(1)}n_j=\overset{*}{T}{}_i^{(n)},\qquad \mu_{kij}^{(n)}n_k=\overset{**}{T}{}_{ij}^{(n)}.
\end{aligned}$$

When $n=1$, since $\overset{*}{f}{}_i^{(1)}=f_i^{(1)}$, $\overset{*}{F}{}_{ij}^{(1)}=F_{ij}^{(1)}$, $\overset{*}{T}{}_i^{(1)}=T_i^{(1)}$, $\overset{**}{T}{}_{ij}^{(1)}=T_{ij}^{(1)}$ and

$$\widetilde{E}_{RS}^{(1)}=\frac{1}{2}(U_{R,S}^{(1)}+U_{S,R}^{(1)}),\qquad \widetilde{\in}_{RS}^{(1)}=(U_{S,R}^{(1)}+\Phi_{RS}^{(1)}),\qquad \widetilde{D}_{RSM}^{(1)}=\Phi_{RS,M}^{(1)}$$

are measures of strain in Mindlin's linear theory of elasticity, noted respectively with ε_{rs}, γ_{rs}, $\varkappa_{rsm}$ — the equations are precisely those which define the boundary - value problem of traction in the linear case of Mindlin's elasticity theory with microstructure, the solution $U_i^{(1)}$, $\Phi_{ij}^{(1)}$ of these equations if it exists, it is unique [5]; and for $n=m$ (2.8) it has the form of the equations defining the traction boundary value problem of the infinitesimal theory for the same material and the same boundary though subject to assigned external body force, dipolar force and surface traction and dipolar surface forces which depend in an explicitly known way upon the previously determined fields $U_1,\ldots,U_{m-1}$, $\Phi_1,\ldots,\Phi_{m-1}$. For $n=2,3,\ldots$ we have

$$(2.9)\quad \rho_0 \overset{*}{f}{}_i^{(m)} = \rho_0 f_i^{(m)} + N_{ji,j}^{(m)} + S_{ji,j}^{(m)}, \qquad \rho_0 \overset{*}{F}{}_{ij}^{(m)} = \rho_0 F_{ij}^{(m)} + R_{kij,k}^{(m)} - \bar{\sigma}_{ki}^{(m-1)} U_{j,k}^{(m-1)},$$
$$\overset{*}{T}{}_i^{(m)} = T_i^{(m)} - (N_{ji}^{(m)} + S_{ji}^{(m)}) n_j, \qquad \overset{**}{T}{}_{ij}^{(m)} = T_{ij}^{(m)} - R_{kij}^{(m)} n_k.$$

Thus we can show successively that each coefficient U_i, Φ_{ij} in (2.2) if it exists, can be found uniquely.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mechanics

Received August 10, 1976

REFERENCES

1. Signorini A., *Transformazioni termoelastiche finite, caratteristiche dei sistemi differenziali, onde di discontinuita in particolare, onde d'urto e teoria degli esplosivi.* Atti 24-th Riun. Soc. Ital. Pro. Sci., **3**, 6 (1936).
2. Green A. E., Adkins J. E., *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics.* Clarendon Press Oxford, 1960.
3. Truesdell C., Noll W., *The Nonlinear Field Theories of Mechanies.* Handbuch der Physik, III, 3, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New—York, 1965.
4. Green A. E., *Micro-materials and Multipolar Continuum Mechanics.* Int. Jour. Eng. Science, *5* (1965).
5. Hlavaceek L., Hlavaceek M., *On the Existence and Uniqueness of Solutions and some Variational Principles in Linear Theories of Elasticity with Coupled Stresses* (II). Aplikace matematiky, **1**, *14*, 411—426 (1969).
6. Mindlin R., *Microstructure in Linear Elasticity.* Arch. Rational Mech. Anal., **16**, 51—78 (1964).
7. Eringen, Suhubi, *Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids* (I), (II). Int. J. Eng. Science, **2**, 189—203, 389—404 (1965).
8. Rivlin R. S., Topakoglu C., *A Theorem in the Theory of Finite Elastic Deformations.* J. of Rat. Mech. and Analysis, **3**, 581—589 (1954).

O METODĂ DE APROXIMAȚII SUCCESIVE ÎN TEORIA NELINIARĂ A SOLIDULUI ELASTIC DIPOLAR SIMPLU

(Rezumat)

Se prezintă metoda aproximațiilor succesive în teoria neliniară a solidelor elastice dipolare. Se discută ca în [2], [1] problema unicității soluției, presupunînd soluția în formă de serie și admițînd că o astfel de soluție există. Calcularea a *m* termeni în dezvoltarea soluției se reduce formal la soluția a *m* probleme cu valori pe frontieră în teoria liniară a elasticității Mindlin cu microstructură.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

D.C. 530.12

THE GENERAL RELATIVISTIC INDUCTION ACCELERATOR

BY

CORNELIU D. CIUBOTARIU

1. Charged Dust Distributions

We construct a betatron model in which the application of the general theory of space like and time like congruences to charged dust distributions in general relativity suggests that rapidly variable magnetic field of the stars (e. g., pulsars) can accelerate particles.

The energy-momentum tensor for a charged dust in the presence of an electromagnetic field has the general form

$$T_{\mu\nu} = r u_\mu u_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}, \tag{1}$$

where $F_{\alpha\beta}$ is the electromagnetic field tensor satisfying the Maxwell equations

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^\mu, \qquad \overset{*}{F}{}^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta;\nu} = 0. \tag{2}$$

The charge-current density J^μ can be split up into a convection and a conduction part

$$J^\mu = \delta u^\mu + \sigma e^\mu, \tag{3}$$

where δ is the proper density of electric charge and σ the conductivity of the dust. An observer with velocity u^α detects an electric field $e_\alpha = F_{\beta\alpha} u^\beta$ and a magnetic field $h_\alpha = \overset{*}{F}_{\beta\alpha} u^\beta$. Then [1], [2]

$$F_{\alpha\beta} = u_\alpha e_\beta - u_\beta e_\alpha - \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\lambda h^\mu. \tag{4}$$

From the equation of conservation $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$, we have

$$(r u^\beta)_{;\beta} u^\alpha + r u^\beta u^\alpha_{;\beta} + (\delta u_\beta + \sigma e_\beta) F^{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

If we multiply by u_α, we obtain [3]

$$(r u^\beta)_{;\beta} + \sigma e_\beta e^\beta = 0, \tag{6}$$

and if we assume, as usual (see [1] and [2]), that the proper material density r is conserved, and the electric field is present, one sees that $\sigma = 0$. From this point of view the charged dust distribution is treated like a charged fluid with a null conductivity, but this is much too restrictive an interpretation.

2. The Betatron Model

In the case of the dust, the specific proper entropy S is constant but this does not imply that the matter density is conservative.

We further assume

$$(ru^\beta)_{;\beta} \neq 0, \qquad \sigma \neq 0, \qquad e^\beta e_\beta \neq 0, \tag{7}$$

and we shall consider that the electric field lines are orthogonal to the vorticity pseudovector

$$e_\nu \omega^\nu = 0, \qquad \text{and} \qquad h^\nu = k\omega^\nu \tag{8}$$

(betatron model). From the Maxwell equations (2), we obtain [2], [3]

$$e^\nu{}_{;\nu} + e^\nu a_\nu - 2h_\nu \omega^\nu = \delta, \tag{9}$$

$$h^\nu{}_{;\nu} + h^\nu a_\nu + 2e_\nu \omega^\nu = 0. \tag{10}$$

The unit-vector tangent to a vortex line is given by

$$n^\alpha = \frac{\omega^\alpha}{|\omega|}, \qquad n^\alpha n_\alpha = -1, \qquad n^\alpha u_\alpha = 0 \tag{11}$$

where

$$-|\omega|^2 = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = \omega_\alpha \omega^\alpha \tag{12}$$

is the magnitude of the rotation.

Let us designate by A the proper area of some charged dust element orthogonal to the direction of the field n^α; then [4]

$$\frac{1}{A}\frac{DA}{d\tau} = \left(\frac{\omega^\alpha}{|\omega|}\right)_{;\alpha} + \frac{a^\alpha \omega_\alpha}{|\omega|} \tag{13}$$

and, on using the divergence condition, $\omega^\alpha{}_{;\alpha} = -2\omega^\alpha a_\alpha$, we find

$$\frac{1}{A}\frac{DA}{d\tau} = -\frac{1}{|\omega|}\frac{D|\omega|}{d\tau} - \frac{a^\alpha \omega_\alpha}{|\omega|}. \tag{14}$$

If we consider the space like congruences determined by the magnetic and electric field lines, we obtain

$$\frac{1}{A}\frac{DA}{d\tau} = \left(\frac{h^\alpha}{|h|}\right)_{;\alpha} + \frac{a_\alpha h^\alpha}{|h|}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{A}\frac{DA}{d\tau} = \left(\frac{e^\alpha}{|e|}\right)_{;\alpha} + \frac{a^\alpha e_\alpha}{|e|}. \tag{16}$$

Multiplying equation (5) by e_α and summing, we find

$$ra^\alpha e_\alpha = \delta e^\alpha e_\alpha . \tag{17}$$

Similarly, we form an interesting consequence of the conservation equation by contracting the product of (5) with h_α,

$$ra^\alpha h_\alpha - \delta e^\alpha h_\alpha + \sigma e_\beta F^{\alpha\beta} h_\alpha = 0. \tag{18}$$

It is possible to transform the term $e_\beta F^{\alpha\beta} h_\alpha$ of (18) as

$$e^\beta F^{\alpha\beta} h_\alpha = e_\beta F^{\alpha\beta} \overset{*}{F}{}^\gamma_\alpha u_\gamma = e^\beta F^\alpha_\beta \overset{*}{F}{}^\gamma_\alpha u_\gamma . \tag{19}$$

In four-dimensions the well known identity,

$$\overset{*}{F}{}^\alpha_\beta F^\gamma_\alpha = F^\alpha_\beta \overset{*}{F}{}^\gamma_\alpha , \tag{20}$$

ensures that

$$e_\beta F^{\alpha\beta} h_\alpha = e^\beta F^\gamma_\alpha u_\gamma \overset{*}{F}{}^\alpha_\beta = e_\beta e_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0 . \tag{21}$$

Hence

$$a^\alpha h_\alpha = 0, \qquad a^\alpha \omega_\alpha = 0. \tag{22}$$

3. A Source of Gravitational Radiation

Further, we shall obtain some Kelvin-Helmholtz theorems which generalize the Raychaudhuri and De's results [2]. Substituting equation (22_2) into equation (14), we obtain

$$\frac{1}{A}\frac{DA}{d\tau} = -\frac{1}{|\omega|}\frac{D|\omega|}{d\tau} . \tag{23}$$

Thus $|\omega|A = \text{const.}$ along the vortex tube as is the case in Newtonian theory. An analogous equation we obtain for magnetic field

$$|h|\, A = \text{const.}, \tag{24}$$

after having made use of equations (8), (10), (15) and (22).

The cosmic betatron will operate efficiently if the electron orbit (or, the orbits of other charged particles) is stable. The orbit should coincide with one of the circular lines of force of the electric field. For this purpose the electric field should have a null expansion of the rate of separation of field lines. Hence (see Eq. 16)

$$\left(\frac{e^\alpha}{|e|}\right)_{;\,\alpha} + \frac{a^\alpha e_\alpha}{|e|} = -\frac{1}{|e|}\frac{D|e|}{d\tau} + \frac{1}{|e|}(e^\alpha{}_{;\,\alpha} + e^\alpha a_\alpha) = 0. \tag{25}$$

In virtue of equations (8) and (9), this may be written as

$$\frac{D|e|}{d\tau} = \delta - \frac{2}{k}|h|^2, \tag{26}$$

that is, the variation of the magnitude of the electric field along the field lines is determined by the proper density of electric charge and the magnitude of the magnetic field. If the magnetic field is rapidly alternating variable, one can accelerate and decelerate charged particles, the resulting acceleration being a source of gravitational radiation from magnetized astrophysical objects.

Received March 2, 1976

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Physics

REFERENCES

1. Lichnerowicz A., *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics.* Benjamin, New York, 1967.
2. Raychaudhuri A. K., De U.K., J. of Physics A, **3**, 263 (1970).
3. Ciubotariu C. D., An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", **19**, 113 (1973).
4. Greenberg P. J., J. Math. Anal. and Appl., **30**, 128 (1970).

ACCELERATORUL DE INDUCŢIE RELATIVIST GENERAL

(Rezumat)

Pe baza teoriei congruenţelor spaţiale şi temporale se elaborează, în cadrul relativităţii generale, un model de betatron cosmic asociat obiectelor astrofizice magnetizate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C.Z. 538.2

L'EFFET PROCOPIU AUX FERROFLUIDES

PAR

EMIL LUCA, C. COTAE et GH. CĂLUGĂRU

1. Introduction

L'effet Procopiu [1], nommé ainsi par Hofbauer et Koch [2], consiste en l'aimantation d'un materiel ferromagnétique à symétrie cylindrique, en présence d'un champ magnétique alternatif circulaire H_a et d'un champ magnétique longitudinal continue h_1. L'aimantation est mise en évidence par la force électromotrice E_p induite dans une bobine sonde, coaxiale à l'échantillon.

L'effet Procopiu a été étudié autant en utilisant des fils en Ni et Fe, auxquels on a évidencié l'influence du champ magnétique longitudinal et des déformations par traction ou torsion [3], [4], [12] du champ magnétique circulaire alternatif [2], [13], [16], de la température [17], et des caractéristiques du circuit [18], tout aussi qu'en utilisant des couches minces en Fe, Co, Ni et leurs alliages déposées sur des supports nonmagnétiques [6], [19], [25].

Il y a aussi quelques éssais théoriques sur l'explications des différents aspects de l'effet Procopiu chez les substances solides.

Dans l'ouvrage présent on donne quelques résultats sur l'effet Procopiu aux ferrofluides.

2. Procédé expérimental

Le montage expérimental est montré dans la fig. 1. Les échantillons en ferrofluides sont introduits dans un tube cylindrique en verre, coaxial à un fil en cuivre, parcourru par un courrant altérnatif, source d'un champ magnétique circulaire H_a d'une frequence de 50 Hz.

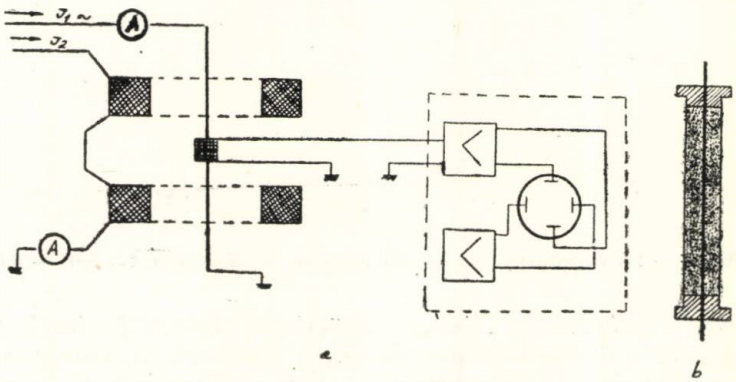

Fig. 1. — La diagramme schématique du montage expérimental.

Le champ magnétique longitudinal h_1 est crée à l'aide d'un système de bobines Helmholtz.

Les ferrofluides sont des suspensions coloidales des particules magnétiques monodoméniques dans un fluide de base [29].

Les échantillons en ferrofluides ont été préparés par voie chimique, ayant la concentration volumétrique entre 0,01 et 0,06.

En fonction de cette concentration volumétrique, l'aimantation des ferrofluides a été de 4.10^3 A/m jusqu'à 24.10^3 A/m.

La microscopie électronique a montré que la dimension moyenne des particules est de 150—250 Å, donc les particules de magnétite sont monodoméniques.

3. Résultats expérimentaux et discussions

L'oscillograme de la fig. 2 réproduit la dépendence force électromotrice type Procopiu E_p (en dessus) et champ magnétique circulaire (en dessus) en fonction de temps, pour un ferrofluide à $\varepsilon = 0{,}04$. Tout aussi comme pour les substances solides [28] la fréquence de la force électromotrice E_p pour ferrofluides est le double de la fréquence du champ magnétique alternatif circulaire H_a. Mais à l'encontre des substances solides, où la forme de la curve est tangentielle pour des champs magnétiques longitudinals h_1 faibles, et sinussoidalle pour des champs h_1 forts, la forme de E_p pour les ferrofluides est seulement sinussoidale.

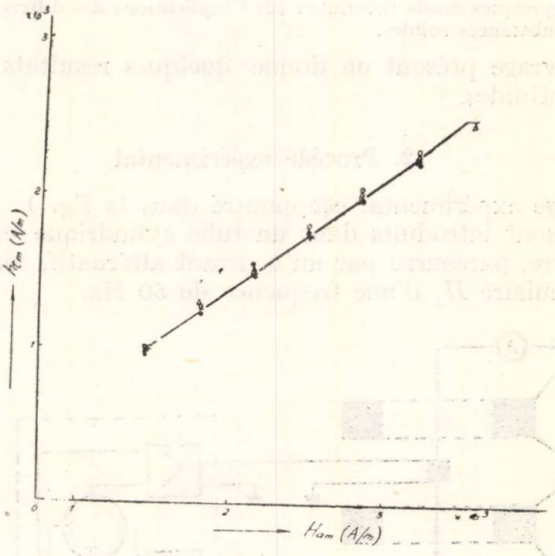

Fig. 3. — La dépendence de h_{tm} en fonction de H_{am} pour ε= 0,01 — 0,06.

La fig. 3 présente le champ magnétique altérnatif circulaire $h_{tm} = H_{am} \sin \omega t$, où la force électromotrice $E_p(t)$ représente la valeur maximale $E_p(tm, h_1)$ en fonction de l'amplitude du champ magnétique altérnatif circu-

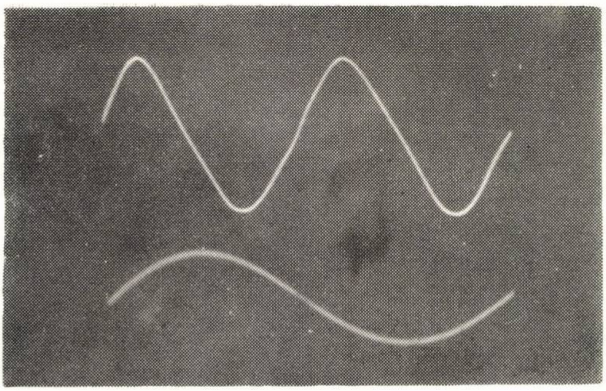

Fig. 2

laire H_{am} pour quatre concentrations du ferrofluide. On rémarque la croissance linéaire du h_{tm} avec la croissance du H_{am} pour tous les ferrofluides, quoiqu'elle soit la concentration volumétrique. On peut attribuer ce fait à la manque d'interaction entre les particules du ferrofluide, dans les limites $\varepsilon = 0{,}01$ et $\varepsilon = 0{,}06$.

Dans la fig. 4 on voit h_{tm} en fonction de h_1 pour cinq valeurs du champ magnétique altérnatif H_{am}, pour un ferrofluide à concentration volumétrique

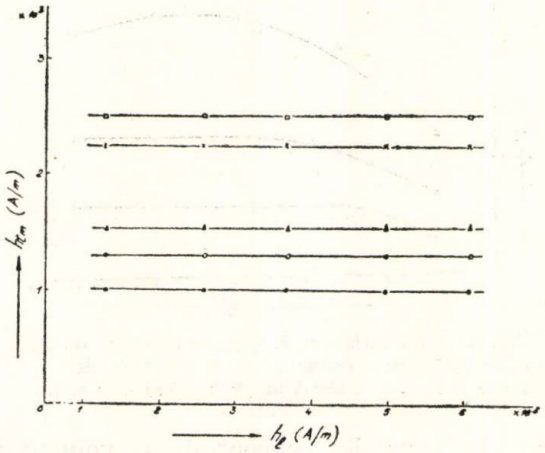

Fig. 4. — La dépendence du h_{tm} en fonction de h_1 à $H = 1\,400$ A/m (●); 1 800 A/m (○); 2150 A/m (Δ); 3 225 A/m (×); 3 587 A/m (□).

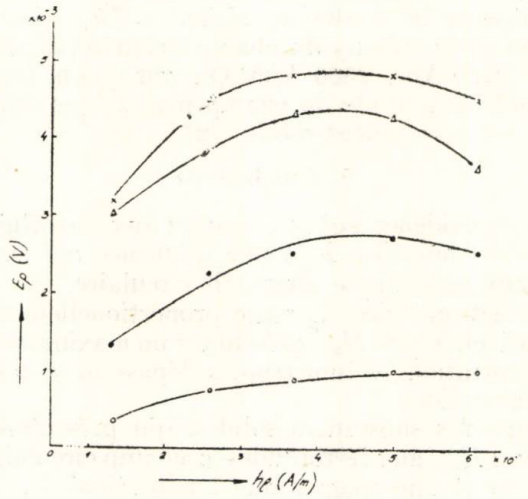

Fig. 5. — La variation de $E_p(tm)$ en fonction de h_1 à $H_{am} = 3\,200$ A/m pour : $\varepsilon = 0{,}01$ (○); 0,02 (●); 0,04 (Δ); 0,06 (×).

$\varepsilon = 0{,}01$. À l'encontre des substraces solides, où h_{tm} présente une croissance jusqu'à la saturation en fonction de h_1 [27], on observe que pour les ferrofluides h_{tm} ne dépend pas du champ longitudinal continuu h_1.

Dans la fig. 5 est représenté $E_p(tm)$ en fonction de h_1 à H_{tm}=3200 A/m pour quatre concentrations volumétriques des ferrofluides $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon =$ $= 0{,}02$; $\varepsilon = 0{,}04$ et $\varepsilon = 0{,}06$.

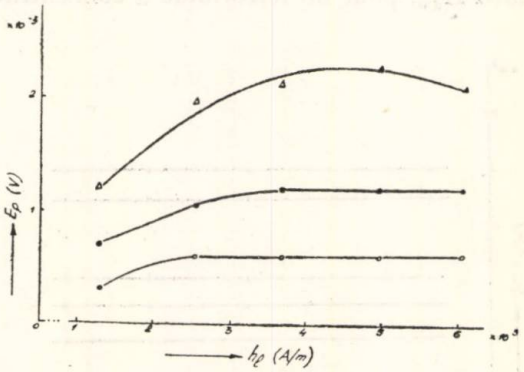

Fig. 6. — La variation E (tm) en fonction de h_1 pour un ferro — fluide avec $\varepsilon = 0{,}02$ à : H = 1 400 A/m (○) ; 2 150 A/m (●) ; 2 850 A/m (Δ).

On remarque que pour des concentrations volumétriques dépassant $= 0{,}02$, il y a la tendention d'apparition d'un maximum tout aussi comme pour les échantillons solides, fils ou couches, [14], [16] — [25]. En même temps que la concentration du matériel magnétique du ferrofluide augmente, croît aussi la valeur de la force électromotrice E_p.

La fig. 6 présente la variation $E_p(tm) = f(h_1)$ pour un ferrofluide avec $\varepsilon = 0{,}02$, pour trois valeurs du champ magnétique alternatif circulaire H_{am} = 1400 A/m, 2150 A/m, 2850 A/m. On voit que la force électromotrice E_p augmente quand l'amplitude du champ magnétique alternatif H_{am} croît, tout comme pour les substrances solides [25].

4. Conclusions

1. On a mis en évidence l'effet Procopiu aux ferrofluides.

2. La force électromotrice E_p a une fréquence qui est le double de la fréquence du champ magnétique alternatif circulaire.

3. La force électromotrice E_p varie proportionellement avec le champ magnétique alternatif circulaire H_{am}, présentant un maximum pour les ferrofluides avec des concentrations volumétriques dépassant $\varepsilon = 0{,}02$ tout comme pour les substances solides.

4. À l'encontre des substances solides, qui présentent une croissance linéaire du h_{tm}, avec H_{am}, aux ferrofluides le champ circulaire h_{am} ne dépend pas de la valeur du champ magnétique longitudinal h_1.

Reçue le 31 mars 1976

Institut Polytechique, Jassy, Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Procopiu Şt.,J. Physique, **1**, 306 (1930).
2. Hofbauer T., Koch K. M., Z. Physik, **130**, 409 (1951).
3. Procopiu Şt., Vasiliu G., C. R. Acad. Sci. Paris, **204**, 673 (1937).
4. Procopiu Şt., Vasiliu G., C. R. Acad. Sci. Paris, **204**, 971 (1937).
5. Procopiu Şt., C. R. Acad. Sci. Paris, **205**, 137 (1937).
6. Procopiu Şt., C. R. Acad. Sci. Paris, **208**, 1212 (1939).
7. Procopiu Şt., Viscrian I., St. şi cerc. Fiz., Iaşi, **15**, 205 (1964).
8. Procopiu Şt. Tutovan V., Şt. şi cerc. Fiz., Iaşi, **2**, 143 (1951).
9. Tutovan V., Anal. Univ. Iaşi, **4**, 107 (1958).
10. Vasiliu G., St. şi cerc. Fiz. Iaşi, **11**, 10 (1960).
11. Procopiu Şt., Tutovan V., Rev. Phys. Acad. R.S.R., **1**, 63 (1965).
12. Procopiu Şt., Tutovan V., Bul. Şt. Acad. R.S.R., **6**, 311 (1954).
13. Bozorth R. K., Dillinger J. F., Phys. Rev., **41**, 345 (1932).
14. Procopiu Şt., Viscrian I., Şt. şi cerc. Fiz. Iaşi, **14**, 13 (1963).
15. Procopiu Şt., Viscrian I., Şt. şi cerc. Fiz. Iaşi, **14**, 307 (1963).
16. Procopiu Şt., Viscrian I., Anal. Şt. Univ. Iaşi, **11**, 61 (1965).
17. Koch F. A., Z. Physik, **155**, 475 (1959).
18. Sorohan M., Şt. şi cerc. Fiz. Iaşi, **10**, 211 (1959).
19. Tutovan V., Apostol P., Anal. Şt. Univ. Iaşi, **8**, 145 (1962).
20. Tutovan V., Bursuc I., C. R. Acad. Sci Paris, **253**, 405 (1961).
21. Bursuc I., Apostol P., Ojoc A., Phys. Status Solidi, **7**, 1027 (1964).
22. Bursuc I., Ojoc A., Tutovan V., Phys. Status Solidi, **7**, K61, (1964).
23. Tutovan V., Bursuc I., Anal. Şt. Univ. Iaşi, **4**, 810 (1960).
24. Sorohan M., Anal. Şt. Univ. Iaşi, **7**, 253, (1962).
25. Călugăru Gh., Cuciureanu C., Thin Solid Films, **9**, 173 (1972).
26. Sorohan M., Phys. Status Solidi, **6**, K81 (1964).
27. Călugăru Gh., C. R. Acad. Sci. Paris, **268**, 828 (1969).
28. Skorski R., Duracz A., J. Appl. Phys., **36**, 511 (1965).
29. Rosensweig R. E., Int. Sci. Technol., **55**, 48 (1966).

EFECTUL PROCOPIU ÎN FEROFLUIDE

(Rezumat)

Se studiază ferofluide de diferite concentraţii volumetrice $\varepsilon = 0{,}01 - 0{,}06$ sub acţiune simultană a unui cîmp magnetic longitudinal continuu şi a unui cîmp magnetic alternativ circular Rezultatele obţinute sînt comparate cu cele obţinute pentru substanţele solide.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

C. D. 535, 546.24

LES PROPRIÉTÉS OPTIQUES DES COUCHES MINCES DE Te

PAR

SOFIA MELINTE et V. MIHU

1. Introduction

L'étude de l'action des ondes électromagnétiques sur les couches minces a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux.

Les études entreprises sur la diffraction électronique ainsi que sur la diffraction des rayons X [1] et [2] démontrent que ces couches sont composées de granules de forme sphérique et ellipsoidale, qui constituent un dipôle électrisé, pour les ondes e. m. incidentes. C'est sur cette base qu'on a déterminé les valeurs des facteurs de reflexion, les facteurs de transmission, etc.

Pour la préparation des couches minces, les lames ont été déposés à la temperature ambiante, par évaporation sous un vide de l'ordre $(2{,}6-1{,}2)10^{-6}$ torr, sur des supports en verre préalablement degazés par chauffage sous vide.

2. Détermination des facteurs R, R' et T

Les facteurs optiques d'une couches traduisent le comportement des électrons de ce métal sous l'action des ondes électromagnétiques.

En nous basant sur ce fait dans le travail que nous présentons nous avons étudié cette action même en vue d'élucider la structure des couches de Te. Les expériences optiques ont fourni des détails de structure concernant les couches à une épaisseur comparable à la longueur d'onde.

Pour déterminer les facteurs R, R' et T (les facteurs de réflexion côté air, côté support et le facteur de transmission), nous avons utilisé une méthode optique en incidence normale, en vue d'évider les effets d'éventuelle anisotropie de la couche. L'installation utilisée est celle décrite par G. Rasigni [4], pourvue de certains modifications.

3. Résultats expérimentaux

Les résultats des mesures sont donnés dans les figures. Dans la fig. 1, on remarque une diminution rapide du T acompagnant le grossisement de l'épaisseur. Les valeurs de la transmission sont d'autant plus grandes que la longueur d'onde est plus petite.

Le facteur R est présenté dans la fig. 2 pour $\lambda = 700$, 589 et 500 mμ. Pour $\lambda = 700$ mμ, R a une valeur petite au cas quand le couche a l'épaisseur de 4,6 mμ ; puis elle croît rapidement atteignant 75% pour $d =$ $= 69{,}7$ mμ. Pour les autres longueurs d'onde R croît avec l'épaiseurs en estant sensiblement plus petite que pour $\lambda = 700$ mμ.

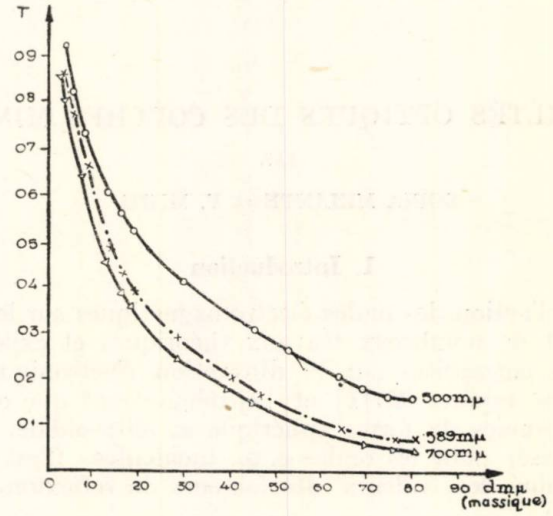

Fig. 1 — Variations des facteurs de transmission T, en fonction de l'épaisseur de la couche de Te.

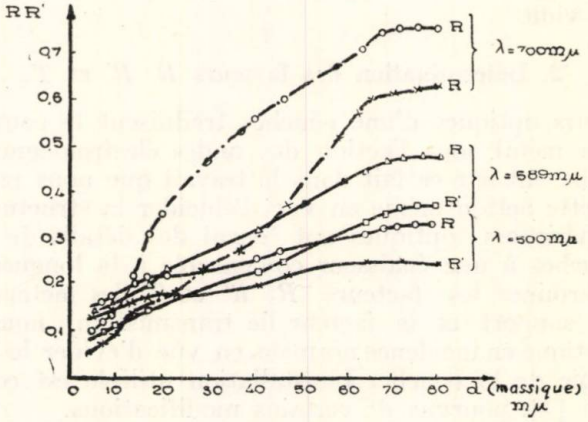

Fig. 2 — Variations des facteurs de réflexion R et R', en fonction de l'épaisseur de la couche de Te.

Les facteurs effectifs d'absorption dans les lames ont été calculée en utilisant les relations :

$$A = 1 - (R + T), \quad A' = 1 - (R' + T),$$

après avoir néglige les pertes d'énergie par la diffusion et les réflexions multiples, ayant en vue que les couches sont relativement épaisses.

Dans la fig. 3 on présente l'absorption pour $\lambda = 700$ mμ. On remarque que l'absorption croîte avec l'épaisseur de la couche en atteignant sa valeur maximum de 28% pour $d = 13{,}6$ mμ et qu'ensuite elle décroîte de telle

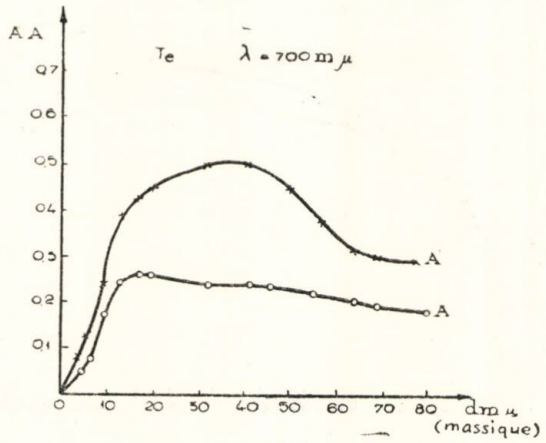

Fig. 3 — Variations de l'énergie absorbée par Te dans les couches minces en fonction de l'épaisseur de la couche, pour $\lambda = 700$ mμ.

manière que, pour des épaisseurs qui dépassent 70 mμ, on obtient un palier. On remarque aussi que par A' le maximum est plus aplati et qu'il s'étend sur un intervalle de l'épaisseur compris entre $d < 45$ mμ et $d > 20$ mμ.

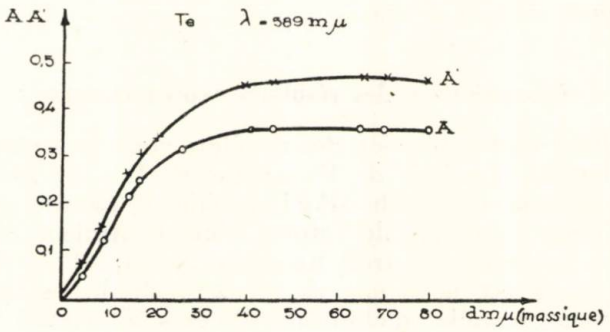

Fig. 4 — Variations des facteurs d'absorption A et A', en fonction de l'épaisseur de la couche de Te, pour $\lambda = 589$ mμ.

Dans la fig. 4 on peut voir l'absorption pour $\lambda = 589$ mμ. On constaté qu'elle croît avec l'épaisseur, en atteignant la valeur maximum pour $d = 40$ mμ. Dans ce cas l'absorption atteint une valeur de 35% supérieure à l'absorption qu'on trouve pour $\lambda = 700$ mμ.

Dans la fig. 5 on présente l'absorption pour $\lambda = 500$ mμ. On remarque que l'absorption croît avec l'épaisseur de la couche et qu'elle atteint les maximums de 60% (A) et de 70% (A'), pour $d = 80$ mμ.

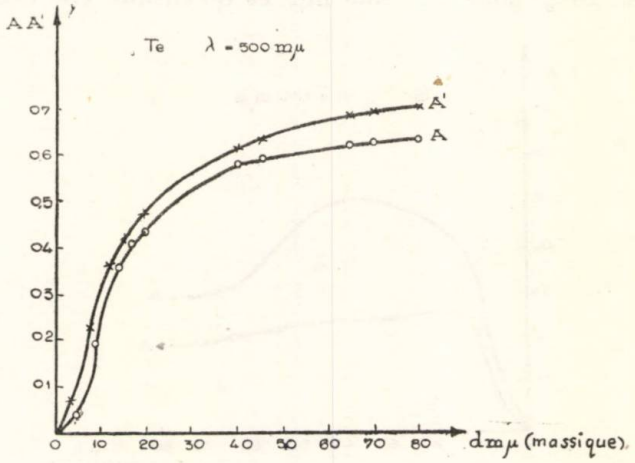

Fig. 5 — Variations des facteurs d'absorption A et A', en fonction de l'épaisseur de la couche de Te, pour $\lambda = 500$ mμ.

L'examen de ces courbes fait apparaître quelques particularités : pour chacune des douze couches étudiées les variations des facteurs de réflexion, de transmission et d'absorption avec l'épaisseur de la couche de Te, sont d'une grande régularité. On constate que, pour $\lambda = 700$ mμ, A passe par un maximum pour $d = 13{,}6$ mμ.

4. Interprétation des résultats expérimentaux

Pour faciliter l'interprétation des résultats nous présentons un schéma simplifié des bandes d'énergie de Te, selon J. R. Reitz [6] et R. Gaspar [7]. Le schéma réduit de Reitz (fig. 6) montre que les bandes provenant des états 5 p et 5 d, de l'atome libre, pourraient, à l'état solide, être nettement séparées en troit bandes p_1, p_2, p_3 et en cinq bandes d, dont la plus basse est la bande d_0. Au zéro absolu les bandes p_1 et p_2 sont complètement remplies d'électrons. D'après le schéma de Gaspar elles se recouvriraient partiellement; la bande supérieure p_3 est vide ; elle se superpose sur d_0 en formant la bande de conduction. Reitz n'a pas pu décidé si le bas de la bande de conduction est constitué par le bord inférieur de p_3 on par celui de d_0.

On peut rapprocher nos résultats expérimentaux des schémas théoriques de Reitz et Gaspar.

En analysant les 3 courbes d'absorption pour A, on constate que l'absorption maximum est obtenue pour $\lambda = 700$ mμ, pour une épaisseur

relativement réduite de la couche. Nous croyons que ce maximum est probablement du à la transition des electrons sous l'action de l'onde électromagnétique entre les bandes inférieures p_1 et p_2 et la bande de conduction. On constate aussi que ce maximum correspond à l'énergie de 1,78 eV. Le déplacement des maximums d'absorption vers des petites longueurs d'onde, respectivement, à des énergies plus grandes de 2,1 eV pour $\lambda = 589$ mμ, et 2,48 eV pour $\lambda = 500$ mμ, montrerait qu'en réalité les électrons ne sont pas parfaitement libres. La largeur des maximums des bandes d'absorption indique que les bandes d'énergie p_1 et p_2 sont effectivement séparées, conformément au schéma de Reitz.

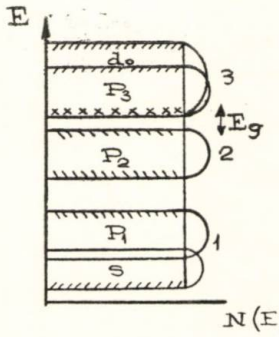

Fig. 6 — Les niveaux énergétiques du Te d'après Reitz et Gaspar.

L'absorption est due à une action réciproque entre le photon et l'électron. C'est cette action réciproque qui détermine les propriétés optiques du métal dans le domaine visible.

Reçue le 28 mars 1975

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique
et
Université de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Gandais M., Rev. d'Optique, **40** *6*, 306 (1961).
2. Melinte S., Leancă M., *Étude de la structure des couches fines par transmission et difraction électronique.* Communication présenté à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 2—4 juillet 1970.
3. Bourg M., Bourg A., J. Physique, **25**, *1—2*, 6 (1964).
4. Rasigni G., Rev. d'Optique, **41**, *11*, 566 (1962).
5. Calinicenco N., Melinte S., Mihu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIV (XVIII)**, *1—2*, s. I, 180 (1968).
6. Reitz R., J. Phys, Rev., **105**, 1 233 (1957).
7. Gaspar R., Acta Phys. Hung., **27**, 289 (1957).
8. Richard J., Roux D., Rev. d'Optique, **41**, *9*, 469 (1962).

PROPRIETĂȚILE OPTICE ALE STRATURILOR SUBȚIRI DE Te

(Rezumat)

Se studiază proprietățile optice ale straturilor subțiri de Te a căror grosime este cuprinsă între 4,5—80 mμ.

Straturile de Te au fost obținute prin vaporizare, sub un vid de ordinul (2,6—1,2) 10^{-6} torr, simultan, în serie de cîte 12 probe, de grosime variabilă.

Se remarcă o anumită concordanță între valorile obținute experimental și teoria nivelelor energetice ale Te, dată de Reitz și Gaspar.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 3—4, 1976
Secţia I
MATEMATICĂ
Tomul XXII (XXVI), Fasc. 1—2, 1976

C. D. 621.319.2

ÉTUDE DE L'INFLUENCE PRODUITE PAR LA MÉTHODE DE MESURE SUR LA VALEUR DE LA CHARGE DE L'ÉLECTRET

PAR

EUGEN NEAGU

1. Introduction

La méthode la plus employée pour déterminer la charge superficielle de l'électret est celle de l'électrode montant, méthode basée sur le phénomène d'induction électrostatique [1], [2]. On considère que la principal désagrement de la méthode [3]... [6] est la possibilité de claquage diélectrique de l'air contenu entre l'électret et l'électrode au moment où l'on lève l'électrode.

Dans un travail antérieur (7] nous avons montré que la valeur maximale de la densité superficielle de la charge σ est limitée tant par les phénomènes qui surgissent pendant le processus de formation de l'électret, que par l'apparition du claquage diélectrique pendant l'extraction de l'électret du champ de formation et la réalisation des premières mesures. La claquage diélectrique de l'air peut apparaître aussi pendant le maintien court-circuitée de la preuve.

Le but du présent travail est de mettre en évidence la manière dont la valeur de σ varie pendant le processus de mesure de la charge par la méthode indiquée.

2. Préparation des preuves

Les électrets ont été obtenus du polymétacrilate de méthyle sous la forme de disques de 3.10^{-2} m de diamètre et d'une épaisseur de 5.10^{-3} m. Les électrodes employés ont été en nickel. On a préparé les électrets par trois méthodes : la première est la méthode bien connue de préparer des termoélectrets. Nous allons nommer cette méthode la méthode A.

Pour diminuer l'influence de l'électrode sur l'électret [8] on a préparé des électrets en introduisant une feuille de papier de condensateur entre l'électrode et le diélectrique. Cette méthode est nommée, dans ce qui suit, a méthode B. Pour les méthodes A et B les preuves ont été chaufées onze heures et puis refroidies aussi onze heures en présence du champ éléctrique. Pour les électrets préparés par la méthode C on a laissé un interstice d'air de $7{,}5.10^{-4}$ m d'épaisseur entre la surface de l'électret et l'électrode, c'est-à-dire, on emploie des électrodes parfaitement blocants.

On a fait le chauffage dans une étuve, à la température de 427°K. La valeur de la tension appliquée a été de 5000 V.

3. Résultats expérimentaux

On a mesuré la densité superficielle de charge σ pour les électrets obtenus par les trois méthode à des intervalles de temp de 15 minutes. La valeur initiale de σ, pour toutes les preuves, est inférieure à celle qui est nécessaire pour le claquage diélectrique de l'air pendant le mesurage de σ et pendant sa conservation ($E = 20.000$ V/cm). Dans cette situation la variation de σ ne peut pas etre attribuée au claquage diélectrique de l'interstice d'air qui est entre l'électret et l'électrode.

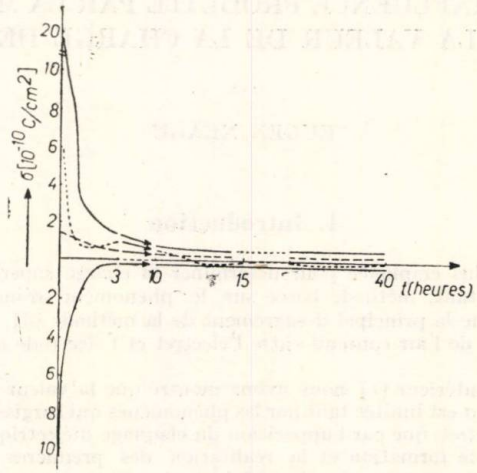

Fig. 1. —La variation en temps de la densité superficielle de charge pour les preuves préparées par la méthode B (ligne pointillée), la charge étant de type hétérocharge, et par la méthode A (ligne continue) la charge étant de type homocharge.

En étudiant les graphiques où l'on a représenté la variation de σ pour les deux surfaces de l'électret, on observe que la charge varie beaucoup d'un mesurage à l'autre quoique l'intervalle de temps qui passe entre deux mesurages successifs soit seulement de 15 minutes. Les courbes sont semblables, du point de vue de la forme, à celles obtenues pour les preuves mesurées à des intervalles de temps plus longs, de l'ordre des jours. En étudiant la fig. 1 on observe q'après 3 heures environ, l'intervalle de temps pendant lequel on a effectué 12 mesurages, la charge diminue jusqu'à une valeur très petite. La valeur mesurée sur la même preuve après deux jours, la preuve étant maintenue en court-circuit, est pratiquement invariable. En étudiant la fig. 2 on observe que pour les deux preuves σ diminue vite entre deux mesurages. Après avoir effectué les 10 premiers mesurages on a fait une pause de 6 heures. On voit que la variation est lente dans cet intervalle. La densité superficielle de charge reste constante après les mesurages effectuées dans les deux premiers jours (fig. 3). On saisit clairement la différence, par rapport aux résultats connus dans la littérature, pour les preuves formées dans les

même conditions, lorsque la valeur stable de σ s'obtient pour un intervalle de temps plus grand.

Il résulte, des faits expérimentaux présentés, que, dans le processus de mesurage, la charge de l'électret diminue beaucoup, ainsi que la forme de la courbe obtenue pour le décroissement de σ dans le temps, qui reste dépendante du nombre des mesurages effectués et de l'intervalle de temps qui passe entre deux mesurages.

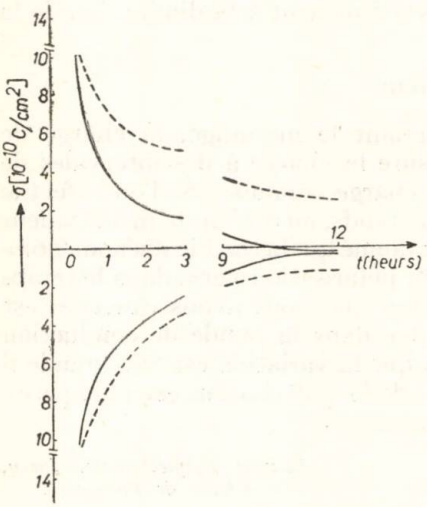

Fig. 2.—La variation en temps de la densité superficielle de charge hétérocharge pour la preuve préparée par la méthode C : ligne continue — preuve maintenue en court-circuit ; ligne pointillée — preuve maintenue non court-circuitée.

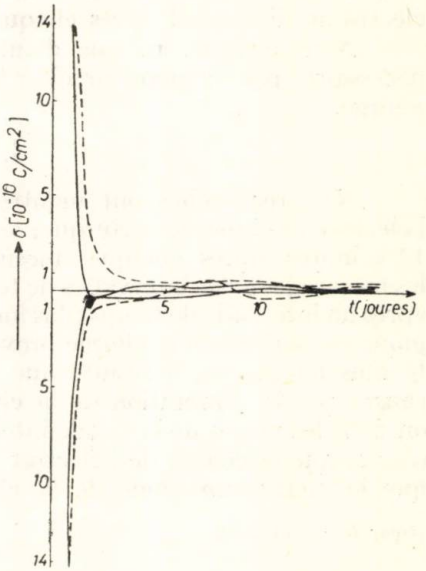

Fig. 3 — La densité superficielle de charge pour la preuve préparée par la méthode C, pour un intervalle de temps plus long.

Pendant la mesure de la charge, l'électret subit une légère pression faite pour diminuer l'interstice de l'air entre l'électret et l'electrode. Pendant tous les mesures qu'on a faites la pression maximale qu'a subie l'électret n'a pas été supérieure à $10^4 N/m^2$. Il est très important que la pression appliquée sur l'électret reste la plus petite possible, parce que, comme il résulte du travail [9], pour de grandes pressions on peut obtenir des électrets dans l'absence du champ électrique polarisant.

La variation observée ne peut pas être attribuée à la modification de la polarisation, parce que, dans la théorie phénoménologique des électrets, on considère que la charge provenue de l'orientation des dipôles est celle qui varie le plus lentement. Nous considérons que la variation est déterminée par la diminution de la charge accumulée dans la bande de conduction du diélectrique ou dans les pièges de la bande interdite du diélectrique. Cette

charge peut provenir soit de la charge qui participe à la conduction, soit de la charge apparrue par activation thermique avec la formation des paires électron-trou.

On peut tirer des faits observés une conclusion aussi en ce qui concerne la nature de la charge des électrets, à savoir il en résulte le role prédominant de la charge captée dans les pièges, par rapport à la charge provenue de l'orientation des dipôles. Les données expérimentales observées nous permettent de considérer l'électret comme un „réservoir" de charges électriques, la charge électrique diminuant après chaque processus de mesure.

Nous considérons que d'autres données experimentales sont encore nécessaires pour pouvoir préciser les causes qui mènent à la diminution de la charge.

4. Conclusions

Nos recherches ont montré que pendant le mesurage, la charge de l'électret diminue de sorte que, si l'on mesure la charge à des intervales de 15 minutes, après quelques mesurages la charge diminue. Si l'on effectue les mesurages à des intervalles de temps plus grands, on obtient la même valeur après un intervalle de temps plus long. Étant donné que la théorie phénoménologique considère que la charge provenue de la polarisation varie dans le temps le plus lentement, il résulte que la variation que nous avons observée est causée par la diminution de la charge captée dans la bande de conduction on dans les pièges de la bande interdite. Vu que la variation est très grande il résulte que la charge de l'électret provenue de la polarisation est plus petite que la charge provenue de la charge captée.

Reçue le 8 mai 1976

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Губкин А. Н., Приборы и техн. эксп., **4**, 113 (1959).
2. Gross B., J. Chem. Phys., **17**, *10* (1949).
3. Perlman M. M., Meunier J. L., J. Appl. Phys., **36**, *2* (1965).
4. Gross B., Brit. J. Appl. Phys., **1** (1950).
5. Reedyk C. W., Perlman M. M., J. Electrochem. Soc., **115**, *1* (1968).
6. Freedman L. A., Rosenthal L. A., Rev. Sci. Inst., **21**, *11* (1950).
7. Neagu E. (sous presse).
8. Neagu E., An. Şt. Univ. Iaşi, s. Fizică, **XX**, *1* (1974).
9. Tutovean V., Scutaru V., An. Şt. Univ. Iaşi, s. Fizică, **XVII**, 121 (1971).
10. Wintle H. J., J. Acoust Soc. An., **53**, *6*, 15, 78 (1973).

STUDIUL INFLUENŢEI PRODUSE DE METODA DE MĂSURĂ ASUPRA VALORII SARCINII ELECTRETULUI

(Rezumat)

Se studiază modul cum variază sarcina electreţilor în urma măsurării ei prin metoda electrodului ridicător. Se arată că în urma fiecărei măsurări sarcina scade cu o anumită valoare, astfel încît în urma efectuării unui număr de măsurări la intervale mici de timp (aproximativ cîte 15 minute), sarcina scade foarte mult. Curba care dă variaţia sarcinii în timp este asemănătoare cu aceea obţinută în cazul în care măsurarea se face la intervale de timp de ordinul zilei.

1977 MAR 29

40822